UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ - INFORMATICĂ

MARINA GORUNESCU

Lecții de Analiză Matematică

pentru informaticieni

Caiet de seminar

REPROGRAFIA UNIVERSITĂȚII DIN CRAIOVA
2000

Scanned with OKEN Scanner

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
Facultatea de Matematică – Informatică

MARINA GORUNESCU

Analiză Matematică
pentru informaticieni
Caiet de seminar

Reprografia Universităţii din Craiova
2000

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Cuvânt înainte

Apariţia acestui caiet nu înseamnă apariţia unei noi culegeri, pe o piaţă deja suprasaturată de acest gen de cărţi, caietul fiind de fapt un instrument care va ajuta studentul din anul I Informatică în însuşirea lecţiilor de Analiză Matematică.

Caietul reprezintă o completare a cursului, conţinând exerciţiile ce ilustrează conţinutul acestuia. Nu am făcut clasica trecere în revistă a rezultatelor teoretice, indicând însă cu exactitate 'coordonatele' din curs. Dacă îmi este permisă o glumă, am considerat că este un mod de a-i face pe unii studenţi să deschidă cursul înainte de sesiune. Toate problemele au indicaţii, care uneori sunt înlocuite cu soluţiile complete. O parte dintre ele vor fi discutate în seminar, altele vor fi lăsate pentru studiul individual şi eventualele neclarităţi vor fi lămurite la seminar şi la consultaţii.

Caietul se adresează direct studentului informatician, apelând pentru ilustrarea unor noţiuni la pachetul software Maple, cu care am lucrat în cadrul Laboratorului de Analiză Matematică în anii 1997-98 şi 1998-99. Cei care au lucrat serios în cadrul acestui laborator, au realizat că nu e vorba numai de învăţarea unor instrucţiuni, ci e nevoie de cunoştinţe serioase de Analiză Matematică. In plus, am prezentat câteva programe reprezentative în Pascal, special concepute pentru începători, elaborate de Ruxandra Gorunescu. Partea de programare este simplă, dar se lucrează cu erori date, cu evaluări de erori şi rezultatele obţinute permit comentarii interesante, pe care le vom face la seminar. In plus, este un mod de a înţelege şi a-şi însuşi temeinic nişte rezultate teoretice importante.

In ultima parte a caietului, am prezentat subiecte date la examene în anii 1998-1999 şi 1999-2000, subiecte conform noii programe analitice. Dacă anul trecut am pus de acord programa analitică cu cele din ţările vest-europene (e vorba mai ales de o nouă ordonare), anul acesta am încercat, pentru început timid, alte moduri de verificare a cunoştinţelor teoretice. In final, pentru un echilibru al numărului de

subiecte aferente fiecărui semestru, am mai propus patru variante pentru Analiză II, în care am experimentat şi alte tipuri de întrebări, inspirată de faptul că în lucrări am întâlnit enunţuri incomplete, dar demonstraţii corecte.

Sper că acest caiet le va fi de ajutor studenţilor mei şi îi va face să-mi dea crezare, încă de la începutul anului universitar, în privinţa faptului că e absolut necesară o disciplină în studiu, o dozare continuă a efortului şi că examenul de admitere este cel mai uşor examen din facultate. Având la dispoziţie cursul reprografiat, caietul de seminar, tot sprijinul meu şi multă seriozitate în studiu, sigur vor reuşi să promoveze, chiar cu note mari, examenele.

Februarie 2000 Marina Gorunescu

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

I. Introducere 7

I.1. Relaţii, funcţii. 7

I.2. Mulţimea numerelor reale. 11

I.3. Mulţimi numărabile. 14

II. Siruri şi serii de numere reale 16

II.1. Siruri de numere reale 16

II.2. Topologia axei reale 22

II.3. Serii. 23

III. Funcţii reale de variabila reală 34

III.1. Funcţii continue 34

III.2. Funcţii derivabile 44

III.3 Integrala Riemann 55

III.4. Siruri şi serii de funcţii 68

III.5. Integrale improprii 79

III.6. Funcţii cu variaţie mărginită 83

III.7. Integrala Stieltjes-Riemann 84

IV. Spaţii metrice 86

IV.1. Noţiuni introductive. 86

IV.2. Siruri în spaţii metrice 87

IV.3. Topologia spaţiilor metrice 89

IV.4. Funcţii continue în spaţii metrice 90

IV.5. Operatori liniari şi continui în spaţii metrice 93

IV.6. Principiul contracţiilor. 94

V. Funcţii vectoriale 99
VI.1. Funcţii vectoriale de variabilă reală 99
VI.2. Drumuri, curbe. 100

VI. Funcţii reale de mai multe variabile reale 105
VI.1. Limita şi continuitatea unei funcţii într-un punct 105
VI.2. Derivate parţiale, diferenţiala unei funcţii într-un punct 107

VII. Funcţii vectoriale de mai multe variabile reale 116
VII.1. Funcţii vectoriale de mai multe variabile reale 116
VII.2. Teorema funcţiilor implicite 117
VII.3. Suprafeţe 127
VII.4. Schimbări de variabile 129

VIII. Integrale cu parametru 133
VIII.1. Integrale cu parametru 133
VIII.2. Integrale improprii cu parametru 135

IX. Integrale multiple 139
IX.2 Calculul integralelor multiple 139

X. Integrale curbilinii 148
X.1. Integrala curbilinie de primul tip 148
X.2. Integrala curbilinie de al doilea tip 151
X.3. Forme diferenţiale exacte. 154

XI Integrale de suprafaţă 161
XI.1. Integrala de suprafaţă 161
XI.2. Formule integrale. 164

Subiecte date la examene 169
Subiecte propuse 186
Bibliografie 192

Scanned with OKEN Scanner

I INTRODUCERE

I.1. *Relații. Funcții.*

I.1.1 Stabiliți domeniile de definiție ale următoarelor funcții:

a) $f(x) = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; d) $f(x) = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$.

R. a) $\bigcup_{k\in Z}[2k\pi,(2k+1)\pi]$; b) ϕ; c) $(-\infty,0)$; d) $[4,6]$.

I.1.2. Fie M o mulțime nevidă și $A \subset M$. Funcția $\chi_A : M \to \{0,1\}$ prin

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

se numește *funcția caracteristică a mulțimii A*.

Fie A și B două submulțimi ale lui M. Să se arate că funcțiile lor caracteristice au următoarele proprietăți:

a) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$;

b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

c) dacă $A \cap B = \phi$, atunci $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$;

d) $\chi_{CA} = 1 - \chi_A$, unde $CA = M \setminus A$;

e) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$;

f) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$;

g) $\chi_{A\Delta B} = (\chi_A - \chi_B)^2$.

Indicație Punctele a),b),c) se obțin din definiția funcției caracteristice. În demonstrarea lui d) se folosește c). Pentru e), f) și g) reamintim formulele:

$A \setminus B = A \cap CB$;

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (scrierea lui $A \cup B$ ca o reuniune disjunctă);

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

I.1.3. Fie A o mulțime nevidă $\{A_i; i \in I\}$ o familie de părți ale lui A, indexată după mulțimea I. Demonstrați *relațiile lui de Morgan*:

$$C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} C(A_i) \text{ și}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} C(A_i).$$

Ind. Stim că :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, i' \in I \text{ astfel încât } x \in A_{i'}.$$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall\, i \in I \text{ avem } x \in A_i.$$

I.1.4. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$, două funcţii oarecare. Dacă:
a) $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;
b) $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

I.1.5. Fie $f : A \to B$ o funcţie oarecare. Arătaţi că:
a) $f \circ 1_A = f$ şi $1_B \circ f = f$ (unde $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$ este *funcţia identică*).
b) Dacă f este bijectivă, atunci $f \circ f^{-1} = 1_B$ şi $f^{-1} \circ f = 1_A$.
c) Dacă $g : B \to A$ este o funcţie cu proprietăţile $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$, atunci f şi g sunt bijective şi $f^{-1} = g$, iar $g^{-1} = f$.
Ind. c) Se foloseşte bijectivitatea funcţiilor 1_B şi 1_A şi problema I.1.4.

1.6. Dacă $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă, atunci $f^{-1} : B \to A$ este bijectivă şi $(f^{-1})^{-1} = f$
Ind. Aplicăm problema I.1.5. c) considerând $g = f^{-1}$

I.1.7. Dacă $u : A \to B$ şi $v : B \to C$ sunt doua funcţii bijective, atunci funcţia compusă $v \circ u : A \to C$ este bijectivă şi $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.
Ind. Aplicaţie la problema I.1.5.c), considerând $g = u^{-1} \circ v^{-1}$.

I.1.8 Fie $f : A \to B$ o funcţie oarecare. Arătaţi că funcţia

$$h : A \to A \times B \quad \text{dată de} \quad h(x) = (x, f(x))$$

este injectivă.
Soluţie Fie $x_1, x_2 \in A$ cu proprietatea $h(x_1) = h(x_2)$, aşadar

$$(x_1, f(x_2)) = (x_2, f(x_2)),$$

rezultând astfel $x_1 = x_2$.

I.1.9. Fie A şi B două mulţimi nevide. Funcţiile

$$pr_1 : A \times B \to A, \quad \text{prin } pr_1(x, y) = x;$$
$$pr_2 : A \times B \to B, \quad \text{prin } pr_2(x, y) = y$$

se numesc *prima* (respectiv *a doua*) *proiecţie a mulţimii* $A \times B$. Arătaţi că funcţiile pr_1 şi pr_2 sunt funcţii surjective.
Ind. Fie $x' \in A$; $\exists\, (x', y) \in A \times B$ astfel încât $pr_1(x', y) = x'$.

I.1 10. Fie A o mulţime nevidă şi $B = \{ b \}$. Funcţia $f : A \to A \times B$, definită prin $f(x) = (x, b)$ este bijectivă.

I.1.11. Fie A şi B două mulţimi nevide. Funcţia $h : A \times B \to B \times A$ definită prin $h(x, y) = (y, x)$ este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

I.1.12. Fie două funcții $f: A \to B$ și $g: A \to C$. Construim funcția
$$h: A \to B \times C, \text{ dată de : } h(x) = (f(x), g(x)).$$
a) Dacă f și g sunt injective, arătați că h este injectivă.
b) Funcțiile f și g fiind surjective, rezultă că h este surjectivă?
Ind. b) Considerăm $f, g: \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$ $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.
Fie $(0,0) \in [-1,1] \times [-1,1]$; avem $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $(0,0) \neq (\sin x, \cos x)$.

I.1.13. Demonstrați afirmația: " nu există funcție surjectivă de la X la $\mathcal{P}(X)$ ", unde X este o mulțime oarecare, nevidă.
Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunând că există o funcție surjectivă $f: X \to \mathcal{P}(X)$. Construim mulțimea:
$$A = \{ x \in X ; x \notin f(x) \};$$
din surjectivitatea lui f rezultă că există $a \in X$ astfel încât $f(a) = A$. Dacă $a \in A$, din definiția lui A rezultă $a \notin f(a) = A$; dacă $a \notin A$ rezultă $a \in f(a) = A$, ceea ce este absurd.

I.1.14 Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$, două funcții oarecare. Arătați că:
$$(g \circ f)(A_1) = g(f(A_1)),$$
unde $A_1 \subset A$
Soluție. Fie $z \in (g \circ f)(A_1)$ există așadar $x \in A_1$ astfel încât
$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
Cum $f(x) \in f(A_1)$ și $z = g(f(x))$ avem
$$z \in g(f(A_1));$$
z fiind arbitrar ales avem $(g \circ f)(A_1) \subset g(f(A_1))$.
Fie $z \in g(f(A_1))$; există $y \in f(A_1)$ astfel încât $z = g(y)$. Cum $y \in f(A_1)$, există $x \in A_1$ astfel încât $y = f(x)$.
Așadar există $x \in A_1$ astfel încât
$$z = g(f(x)) \quad (g \circ f)(x), \text{ adică } z \in (g \circ f)(A_1),$$
rezultând
$$g(f(A_1)) \subset (g \circ f)(A_1).$$

I.1.15. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$. Determinați $f((-1,3))$.
Ind. Se observă că $f(x) = h(g(x))$, unde $g(x) = x^2$ și $h(y) = y^2 - 4y + 3$. Aplicând problema I.1.14, obținem:
$$f((-1,3)) = h(g((-1,3))) = h([0,9)) = [-1,48)$$

I.1.16. Fie $f: A \to B$, o funcție oarecare și $\{ A_i : i \in I \}$ o familie de părți ale lui A, indexată după mulțimea I. Să se arate că:
a) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
b) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
c) fie $A_1 \subset A$, atunci $f(CA_1) = f(A) \setminus f(A_1)$.
Ind. a) se deduce din următorul șir de echivalențe:
$$y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ și } y = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x, \exists i' \text{ astfel încât } i' \in I, x \in A_{i'} \text{ și } y = f(x) \Leftrightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I$ şi $y \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;

y fiind arbitrar ales egalitatea este demonstrată. Analog se arată celelalte relaţii.

I.1.17. Fie $f: \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$; determinaţi $f^{-1}((0,1/2])$

R. $f^{-1}((0,1/2]) = \bigcup_{k \in Z} \{(2k\pi, 2k\pi + \pi/6] \cup [2k\pi + 5\pi/6, (2k+1)\pi)\}$

I.1.18. Fie $f: A \to B$ o funcţie oarecare şi $\{B_i; i \in I\}$ o familie de părţi ale lui B, indexată după I. Să se arate:

a) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

b) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

c) fie $B_1 \subset B$, atunci $f^{-1}(CB_1) = Cf^{-1}(B_1)$.

Ind. b) $x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

I.1.19. Fie $f: A \to B$ şi $g: B \to C$, două funcţii oarecare şi $C_1 \subset C$. Arătaţi că: $(g \circ f)^{-1}(C_1) = f^{-1}(g^{-1}(C_1))$.

Ind. Fie $x \in (g \circ f)^{-1}(C_1) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in C_1 \Leftrightarrow g(f(x)) \in C_1 \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C_1)$ $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C_1))$.

I.1.20. Fie $f: A \to B$ o funcţie oarecare şi $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. Arătaţi că:

a) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

b) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Ind. a) $y \in f(f^{-1}(B_1)) \Rightarrow \exists\, x \in f^{-1}(B_1)$ astfel încât $y = f(x)$; dar $f(x) \in B_1$ şi $y = f(x)$, aşadar $y \in B_1$; b) analog.

I.1.21. Fie N^* mulţimea numerelor naturale nenule. Definim în N^* relaţia $\mathcal{R}$ astfel: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ divide pe y. Arătaţi că $\mathcal{R}$ este o relaţie de ordine parţială.

I.1.22. Fie $E = (0,1)$; în mulţimea $N^* \times E$ definim relaţia $\mathcal{R}$ astfel:

$$(x_1, x_2)\ \mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$$

Arătaţi că este o relaţie de ordine totală.

I.1.23. Fie M o mulţime arbitrară.

a) Să se arate că $(\mathcal{P}(M), \subset)$ este o mulţime ordonată.

b) Fie $\{A_i; i \in I\}$ o familie de elemente din $\mathcal{P}(M)$. indexată după I. Arătaţi că:

$$\sup\{A_i; i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\inf\{A_i; i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. b) Fie $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, evident A este un majorant al familiei $\{A_i ; i \in I\}$. Fie C un alt majorant, astfel $A_i \subset C$, $\forall i \in I$ şi atunci $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset C$, deci A este cel mai mic majorant.

I.2. *Mulţimea numerelor reale.*

I.2.1 Fie $a, b \in \boldsymbol{R}$, cu proprietatea că :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon;$$

atunci $a \leq b$.

I.2.2 Să se arate că $\bigcap_{n \in N^*} (0, \frac{1}{n}) = \phi$

Soluţie. Presupunem că există $x \in \bigcap_{n \in N^*} (0, \frac{1}{n})$, aşadar

$$\forall n \in \boldsymbol{N^*} \text{ avem } 0 < x < \frac{1}{n}.$$

Aplicând principiul lui Arhimede numerelor x şi 1, obţinem:

$$\exists! \, m \in \boldsymbol{N^*} \text{ astfel încât } 1 < mx,$$

adică $x > \frac{1}{m}$. Aşadar $\forall n \in N^* \quad n > m, \; x > \frac{1}{n}$, obţinând o contradicţie.

I.2.3. Fie $x \in \boldsymbol{R}$ şi mulţimile

$$N_x = \{ r \in \boldsymbol{Q} ; r \leq x \} \text{ şi } P_x = \{ r \in \boldsymbol{Q} ; x \leq r \}$$

Să se arate că

a) mulţimea $N_x \subset \boldsymbol{R}$ este mărginită superior şi $\sup N_x = x$;

b) mulţimea $P_x \subset \boldsymbol{R}$ este mărginită inferior şi $\inf P_x = x$.

Ind. a) x este un majorant al mulţimii N_x;

fie $\varepsilon > 0$, conform propoziţiei I.2.2., în intervalul $(x - \varepsilon, x)$ există cel puţin un număr raţional, adică :

$$\exists \, r_\varepsilon \in N_x \text{ astfel încât } x - \varepsilon < r_\varepsilon \leq x.$$

Aplicând propoziţia I.2.3 obţinem $\sup N_x = x$.

I.2.4. Fie $A \subset \boldsymbol{R}$ o multime mărginită. Definim:

$$-A = \{ -a ; a \in A \}$$

Arătaţi că $-A$ este mărginită şi

$$-\sup A = \inf (-A) \leq \sup (-A) = -\inf A.$$

Ind. Fie $p = \sup A$; atunci

Scanned with OKEN Scanner

$\forall a \in A$ avem $a \leq p$,

de unde

$\forall -a \in -A$ avem $-p \leq -a$.

Conform propoziției I.2.3 :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ astfel încât $p - \varepsilon < a_\varepsilon \leq p$;

așadar

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists -a_\varepsilon \in -A$ astfel încât $-p \leq -a_\varepsilon < -p + \varepsilon$,

deci $\inf(-A) = -p = -\sup A$.

I.2.5 Fie A și B două mulțimi mărginite de numere reale.Definim:

$$A + B = \{ a + b ; a \in A \text{ și } b \in B \}$$

Arătați că $A + B$ este o mulțime mărginită și

$$\inf A + \inf B = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Ind. Avem :

$$\forall a \in A \quad \inf A \leq a \quad \text{și} \quad \forall b \in B \quad \inf B \leq b$$

și astfel

$$\forall a + b \in A + B \quad \inf A + \inf B \leq a + b,$$

deci $\inf A + \inf B$ este un minorant al mulțimii $A + B$; $\inf(A + B)$ fiind cel mai mare minorant avem :

$$\inf A + \inf B \leq \inf(A + B).$$

Conform propoziției I.2.3 luăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar ales și astfel există $a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$ cu proprietatea

$$a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon \text{ și } b_\varepsilon < \inf B + \varepsilon;$$

așadar există $a_\varepsilon + b_\varepsilon \in A + B$ astfel încât $a_\varepsilon + b_\varepsilon < \inf A + \inf B$; cum $\inf(A + B) \leq a_\varepsilon + b_\varepsilon$, obținem:

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \inf(A + B) < \inf A + \inf B + \varepsilon$$

și pe baza problemei I.2.1 avem $\inf(A + B) \leq \inf A + \inf B$

I.2.6. Fie A și B două mulțimi mărginite de numere reale pozitive. Definim:

$$A \cdot B = \{ a.b; a \in A \text{ și } b \in B \}$$

Arătați că mulțimea $A \cdot B$ este mărginită și :

$$\inf A \cdot \inf B = \inf A \cdot B \leq \sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$$

Ind. Deoarece

$$\forall a \in A \ \inf A \leq a \text{ și } \forall b \in B \ \inf B \leq b ,$$

avem:

$$\forall a.b \in A \cdot B \quad \inf A \cdot \inf B \leq a.b,$$

deci $\inf A \cdot \inf B \leq \inf A \cdot B$.

Fie $\varepsilon > 0$; atunci $\exists a_\varepsilon \in A$ astfel încât $a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$

$\exists b_\varepsilon \in B$ astfel încât $b_\varepsilon < \inf B + \varepsilon$

cum $a_\varepsilon . b_\varepsilon \in A \cdot B$, vom avea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \inf A \cdot B < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon (\inf A + \inf B + \varepsilon);$$

ε fiind arbitrar ales obținem: $\inf A \cdot B \leq \inf A \cdot \inf B$.

Remarcă

Dacă A și B nu sunt mulțimi de numere reale pozitive egalitatea

$$\inf A \cdot \inf B \quad \inf A \cdot B$$

Scanned with OKEN Scanner

nu are loc; i.e. $A = \{ \frac{1}{n} ; n \in N^* \}$ şi $B = \{ -1 - \frac{1}{m} ; m \in N^* \}$; $\inf A = 0$, $\inf B = -2$,

dar $A \cdot B = \{ -\frac{1}{n} - \frac{1}{n.m} ; n, m \in N^* \}$ şi $\inf A \cdot B = -2$.

I.2.7. Fie A şi B două mulţimi mărginite de numere reale. Să se arate că :

a) dacă $A \subset B$, atunci $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$;

b) $A \cup B$ este mărginită şi

$\min \{ \inf A, \inf B \} = \inf (A \cup B) \le \sup (A \cup B) = \max \{ \sup A, \sup B \}$

Ind. a) $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow \inf B \le x$, $\forall x \in A$; deci $\inf B$ este un minorant al mulţimii A şi astfel $\inf B \le \inf A$ ($\inf A$ fiind cel mai mare minorant al lui A);

b) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf (A \cup B) \le \inf A, \inf (A \cup B) \le \inf B,$$

aşadar:

$$\inf (A \cup B) \le \min \{ \inf A, \inf B \}.$$

Fie $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \Rightarrow \inf A \le x$ sau $\inf B \le x \Rightarrow$

$$\min \{ \inf A, \inf B \} \le x,$$

x fiind arbitrar ales din $A \cup B$ rezultă

$$\min \{ \inf A, \inf B \} \text{ este minorant al mulţimii } A \cup B,$$

şi astfel: $\min \{ \inf A, \inf B \} \le \inf (A \cup B)$.

I.2.8 O funcţie $f : A \to \boldsymbol{R}$, se zice *mărginită superior* (*inferior*) dacă $f(A) \subset \boldsymbol{R}$ este mărginită superior (inferior); $\sup f(A)$ ($\inf f(A)$) se numeşte *marginea superioară(inferioară) a lui f* şi se notează:

$$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x), \quad \inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$$

Să se arate că dacă $f, g : A \to \boldsymbol{R}$ sunt mărginite (adică mărginite inferior şi superior), atunci $f + g$ este mărginită şi:

$$\inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x) \le \inf_{x \in A} (f+g)(x) \le \sup_{x \in A} (f+g)(x) \le \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$$

Ind. $\forall x \in A$ avem $f(x) \le \sup_{x \in A} f(x)$ şi $g(x) \le \sup_{x \in A} g(x)$,

deci :

$$(f+g)(x) \le \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x), \quad \forall x \in A;$$

aşadar :

$$\sup_{x \in A} (f+g)(x) \le \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

I.3. *Mulțimi numărabile*

I.3.1 Arătați că mulțimea numerelor prime este numărabilă.

Ind. Folosim propoziția I.3.1, fiind suficient să arătăm că P mulțimea numerelor prime este infinită. Presupunem contrariul $P = \{p_1, p_2, ... p_n\}$, dar numărul $p_1 p_2 ... p_n + 1$ este număr prim (nu este divizibil cu nici unul din numerele din P) și nu aparține lui P (fiind mai mare decât p_k, $1 \leq k \leq n$), contradicție.

I.3.2. Demonstrați că mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali este numărabilă.

Soluție. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali este reuniunea numărabilă a mulțimilor $\mathcal{P}_n$,unde am notat cu $\mathcal{P}_n$ mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n. .Se demonstrează prin inducție că mulțimea $\mathcal{P}_n$ este numărabilă:

Pentru $n = 0$ avem $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}$;

Presupunem ca mulțimea $\mathcal{P}_n$ este numărabilă; ținând seama că orice element din $\mathcal{P}_{n+1}$ este de forma $P_n(x) + a_{n+1} x^{n+1}$, unde $P_n \in \mathcal{P}_n$ și $a_{n+1} \in \mathcal{Q}$, putem construi bijecția

$$f: \mathcal{P}_n \times \mathcal{Q} \to \mathcal{P}_{n+1} \text{ dată de } f(P_n, a_{n+1}) = P_{n+1}$$

și folosind propoziția I.3.2 obținem că $\mathcal{P}_{n+1}$ este numărabilă. Așadar mulțimea polinoamelor este numărabilă conform propoziției I.3.3.

I.3.3. Un număr real se numește număr *algebric* dacă este rădăcina unui polinom cu coeficienți raționali. Demonstrați că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Ind. Mulțimea numerelor algebrice se scrie ca o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile, folosind faptul că un polinom de grad n are cel mult n rădăcini.

I.3.4. Imaginea unei mulțimi numărabile printr-o funcție este o mulțime cel mult numărabilă.

I.3.5 Fie M o mulțime oarecare și $B = \{0,1\}$. Arătați că $\mathcal{P}(M)$ este cardinal echivalentă cu mulțimea $Hom(M, B)$.

Ind. Definim funcția $\chi : \mathcal{P}(M) \to Hom(M, B)$ prin $\chi(A) = \chi_A$, $A \subset M$, (unde χ_A este funcția caracteristică a mulțimii A).

Din $\forall A, B \in \mathcal{P}(M)$, $\chi_A = \chi_B \Rightarrow A = B$, rezultă injectivitatea lui χ;

fie $f \in Hom(A, B)$, construim $A = \{x \in M ; f(x) = 1\}$ și observăm că $\chi(A) = f$ ($\chi_A, f \in Hom(M, B)$; $\forall x \in A$ avem $\chi_A(x) = 1$, $f(x) = 1$ (din definiția mulțimii A) și $\forall x \in A$ avem $\chi_A(x) = 0$, $f(x) = 0$.)), dovedind astfel surjectivitatea lui f.

Remarcă

Fie A o mulțime finită, $card\, A = m$; conform problemei I.3.3,

$$card\, \mathcal{P}(A) = 2^m.$$

I.3.6 Fie A o mulțime oarecare. Argumentați afirmația:

$$\text{card } A < 2^{card\, A}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Conform problemei I.3.5 card $\mathcal{P}(A) = 2^{card\ A}$; din $A \in \mathcal{P}(A)$ obținem $card\ A \leq card\ \mathcal{P}(A)$. Problema I.1.13 afirmă că nu există aplicație surjectivă de la A la $\mathcal{P}(A)$, așadar $card\ A \neq card\ \mathcal{P}(A)$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

II. SIRURI SI SERII DE NUMERE REALE

II.1. *Siruri de numere reale.*

II.1.1 Arătați că sistemul vecinătăților punctului $x_0 \in \boldsymbol{R}$, $V(x_0)$ are următoarele proprietăți:

a) $V \in V(x_0) \Rightarrow x_0 \in V$

b) $V_1, V_2 \in V(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in V(x_0)$

c) $V \in V(x_0)$ și $A \supset V \Rightarrow A \in V(x_0)$

d) $\forall V \in V(x_0)$, $\exists W \in V(x_0)$ astfel încât $\forall y \in W \Rightarrow V \in V(y)$.

Ind. In demonstrarea punctelor a), b), c) se folosește definiția vecinătății unui punct

d) afirmă că nu orice vecinătate a unui punct x_0 este vecinătate pentru toate elementele sale (e.g. $V = [-1, 1] \subset R$ vecinătate a lui 0, nu este vecinătate a lui -1, respectiv a lui 1., dar $U = (-1,1)$ este vecinătate pentru toate punctele sale.).

In demonstrație, folosind definiția, obținem existența unui interval deschis $(x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon) \subset V$ și vom considera $W = (x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon)$.

II.1.2 Argumentați convergența șirurilor următoare cu ajutorul definiției:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le k < 1$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \theta.n}{n} = 0$

Ind. a) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \left[\frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, astfel încât $\forall n \ge n_0$ avem: $\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$.

b) ținând seama că $\left|\frac{\sin \theta.n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$, obținem: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, astfel încât $\forall n \ge n_0$ avem: $\left|\frac{\sin \theta.n}{n}\right| < \varepsilon$.

II.1.3. Arătați că următoarele șiruri sunt șiruri Cauchy:

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k!}$; c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k$, unde $(a_n)_n \subset \boldsymbol{R}$ este un șir mărginit și $|q| < 1$.

Ind. In aplicații, folosim o alta variantă a definiției șirului Cauchy: $(x_n)_n \subset \boldsymbol{R}$ este șir Cauchy dacă :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N$ astfel încât $\forall n \ge n_0$ și $\forall p \in N$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

a) evaluăm: $|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$;

deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, avem: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,n_0\in N$ astfel încât $\forall\,n\geq n_0$ şi $\forall p\in N$ $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. (In general problema este rezolvată dacă reuşim majorarea lui $|a_{n+p}-a_n|$ cu un şir care să nu depindă de p, convergent la 0, sau cum se mai spune $a_{n+p}-a_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, uniform în raport cu p);

b) deoarece $\frac{|\sin k|}{k!}<\frac{1}{k(k+1)}$ problema se reduce la cazul precedent;

c) ţinând seama că şirul $(a_n)_n\subset R$ este un şir mărginit, adică $\exists\,M>0$ astfel încât $\forall\,n\in N$ avem $|a_n|\leq M$, evaluăm:

$$|c_{n+p}-c_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kq_k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k||q|^k\leq\leq M\sum_{k=n+1}^{n+p}|q|^k=M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^{n+p}}{1-|q|}<\frac{M}{1-|q|}\cdot|q|^{n+1};$$

din $\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}=0$, deducem că şirul $(c_n)_n$ este şir Cauchy.

II.1.4. Să se determine A_i' $1\leq i\leq 5$, unde: $A_1=\{1,2,3\}$, $A_2=(1,3]$, $A_3=Q$, $A_4=(0,1)\setminus Q$, $A_5=\{\frac{1}{2^n},n\in N\}$.

R. $A_1'=\phi$, $A_2'=[1,3]$, $A_3'=R$, $A_4'=[0,1]$, $A_5'=\{0\}$.

II.1.5. Fie $A\subset R$; arătaţi că $x_0\in A'$ dacă şi numai dacă

$$\forall\,V\in V(x_0)\quad card\,(A\setminus\{x_0\})\cap V\geq\aleph_0.$$

Ind. Argumentarea se reduce la remarca de la pagina 17 a cursului.

II.1.6 Arătaţi că derivata unei mulţimi de numere reale are următoarele proprietăţi:

a) $A\subset B\Rightarrow A'\subset B'$

b) $(A\cup B)'=A'\cup B'$

c) $(A\cap B)'\subset A'\cap B'$.

Ind. Se poate folosi definiţia punctului de acumulare, sau propoziţia II.1.7, sau exerciţiul II.1.5. Remarcăm că proprietatea c) se extinde la familii finite de mulţimi, dar nu şi la una infinită; în acest caz avem relaţia: $\left(\bigcup_i A_i\right)'\supset\bigcup_i A_i'$;

(e.g. $A_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left(\bigcup_{n\in N}A_n\right)'=\{0\}\supset\bigcup_{n\in N}A_n'=\phi$).

II.1.7. Folosind trecerea la limita în inegalităţi, (propoziţia II.1.8) arătaţi că:

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; b) $\lim_{n\to\infty}\frac{[n.a]}{n}=a$, $\forall a\in R$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{[a]+[3^2a]+\ldots+[(2n-1)^2a]}{n^3}=\frac{4a}{3}$, d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=1$

Ind. a) Se consideră şirul $a_n=\sqrt[n]{n}-1>0 \Rightarrow n=(a_n+1)^n>\frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<a_n<\sqrt{\frac{2}{(n-1)}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0;$

b) Se foloseşte inegalitatea: $\frac{n.a-1}{n}<\frac{[na]}{n}\le\frac{n.a}{n}$, $\forall\, n\in N$;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{[a]+[3^2a]+\ldots+[(2n-1)^2a]}{n^3}=\frac{4a}{3}$;

d) Avem : $1<\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}<\sqrt[n]{n}$, $\forall\, n\in N$.

II.1.8. Arătaţi că şirul $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este monoton şi mărginit.

Ind. Folosim inegalitatea mediilor:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\le\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

rezultând astfel că $(x_n)_n$ este crescător;

evaluăm:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\le$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\le 3.$$

II.1.9. Arătaţi că şirurile $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $s_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ au aceeaşi limită e, care este un număr iraţional.

Ind. Evident $(s_n)_n$ este un şir crescător; $\forall\, n\in N$ avem $s_n\le 3$ (pentru demonstraţie a se vedea problema II.1.8). Din aceeaşi problemă, rezultă $x_n\le s_n$, $\forall\, n\in N$, aşadar $e\le\lim_{n\to\infty}s_n$.

Pe de altă parte, fixând $n\in N$ şi luând $m\ge n$, avem:

$$x_m=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\ge$$

$$\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

şi astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$e = \lim_{m\to\infty} x_m \geq \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)) = s_n, \forall\, n \in N,$

rezultând $\lim_{n\to\infty} s_n = e$.

Fie $m \geq n$, avem:

$$0 < s_m - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{m!} \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) \leq \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$$

Trecând la limita în raport cu m, obținem: $0 \leq e - s_n \leq \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$, $\forall\, n \in N^*$.

Presupunem că $e = \frac{p}{q} \in Q$; știm că $e \in (2,3)$, deoarece $x_n \in (2,3)$, așadar $p,q \in N$ și $q > 1$.

Înlocuind în inegalitatea dedusă anterior, obținem pentru $n = q$:

$$0 < p\,(q-1)! - (q! + \frac{q!}{1!} + \ldots + \frac{q!}{q!}) \leq \frac{1}{q} < 1,$$

contradicție, deoarece $p\,(q-1)! - (q! + \frac{q!}{1!} + \ldots + \frac{q!}{q!}) \in Z$.

II.1.10. Demonstrați că șirul $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este descrescător și convergent la e.

Ind. Aplicăm inegalitatea mediilor (media armonică este mai mică sau egală cu media geometrică): $\frac{n+2}{1+\frac{n+1}{1+\frac{1}{n}}} \leq \sqrt[n+2]{1\cdot(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$, adică $\frac{n+2}{n+1} \leq \sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$ și

astfel $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Altfel, ținând seama că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$, demonstrăm că

șirul $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ este strict crescător cu ajutorul inegalității mediilor (media geometrică este mai mică sau egală cu media aritmetică)

Obținem astfel, folosind și rezultatul din II.1.8, o inegalitate deosebit de utilă:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall\, n \in N.$$

II.1.11. Studiați natura șirului $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in N^*$

Ind. Din inegalitatea stabilită în exercițiul precedent, obținem :

$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$, astfel: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0$ și

Scanned with OKEN Scanner

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{n+1}{n} > 0;$$

fiind şir descrescător şi mărginit inferior, $(x_n)_n$ este convergent, limita sa este

$c = 0{,}577215\ldots$ (constanta lui *Euler*).

II.1.12. Demonstraţi afirmaţia : dacă şirurile de numere reale $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ au aceeaşi limită α, atunci şirul $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n \ldots$ converge la α

II.1.13. Să se studieze convergenţa şirului: $x_n = \dfrac{1}{1+x_{n-1}}$, $n \geq 2$, $x_1 = 1$

Ind. Studiem monotonia şi mărginirea şirului:

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 + x_n - 1 < 0 \Leftrightarrow x_n \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n^2 + x_n - 1 > 0 \Leftrightarrow x_n \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(se demonstrează imediat prin inducţie că $x_n > 0$.)

$$x_1 > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1}{1+x_1} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{1}{1+x_2} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \ldots$$

Se arată prin inducţie că $(x_{2k})_k \subset \left(0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ şi $(x_{2k-1})_k \subset \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Se verifică uşor că : $x_{2k+2} - x_{2k} > 0$, iar $x_{2k+1} - x_{2k-1} < 0$; aşadar subşirurile $(x_{2k})_k$ şi $(x_{2k-1})_k$ sunt convergente. Deci există $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+2}$ şi $y = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$;

din relaţia de recurenţă rezultă sistemul:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+y} \\ y = \dfrac{1}{1+x} \end{cases},$$

cu soluţia $x = y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Aplicând problema II.1.12, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

II.1.14. Studiaţi convergenţa şirului dat prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = \frac{m}{1+x_n}, \quad m > 0, \quad x_0 > 0.$$

Ind. Se disting trei cazuri:

$$x_0 < \frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}; \quad x_0 = \frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}; \quad x_0 > \frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}$$

şi se rezolvă analog cu problema precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

II.1.15. Să se studieze convergența șirului :

$$x_1 = \sqrt{1-a}\ ,\ x_{n+1} = \sqrt{1-x_n}\ , a \in (0,1).$$

Ind. Problema este asemănătoare cu II.1.14.

II.1.16. Să se determine termenul general al șirului definit prin relația de recurență $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$, $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Ind. Este o recurență liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți, omogenă; ecuația caracteristică este $r^2 - 3r + 2 = 0$, cu soluțiile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Soluția generală este $x_n = A.1^n + B.2^n$, unde A și B se determină din condițiile inițiale :$2 = A + 2B$, $3 = A + 4B$; rezultă $x_n = 2^{n-1} + 1$.

II.1.17. (șirul lui *Fibonacci*) Fie $(x_n)_n$ un șir definit astfel: $x_1 = x_2 = 1$, și $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$ ($x_0 = 0$). Arătați că :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

II.1.18. Să se afle limitele extreme ale șirurilor:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n+1}{3n}$; b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n^2+1}$; c) $x_n = \sqrt[n]{n} + \cos\frac{n\pi}{3}$

Ind. Folosim propoziția II.1.8

a) $x_{2k} = 1 + \frac{2k+1}{6k}$, $x_{2k+1} = -\frac{2k+2}{3(2k+1)}$, $k \in N$; așadar notând $L(x_n)$ mulțimea punctelor limită avem $L(x_n) = \{-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\}$ și astfel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{4}{3}\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\frac{1}{3}.$$

b) $L(x_n) = \{0,1\}$

c) $L(x_n) = \{0,1/2,3/2,2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

II.2. *Topologia axei reale.*

II.2.1. Fie $A, B \subset \boldsymbol{R}$; arătați că:

a) $A \subset B \Rightarrow int\, A \subset int\, B$ și $\overline{A} \subset \overline{B}$

b) $C(intA) = C\overline{A}$ și $C\overline{A} = int\,(CA)$.

Ind. a) consecință imediată a definițiilor;

b) $x \in C(intA) \Leftrightarrow x \notin int\, A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap CA \neq \phi \Leftrightarrow x \in C\overline{A}$

(x fiind arbitrar ales, egalitatea este demonstrată).

II.2.2. Fie $A \subset \boldsymbol{R}$; arătați că:

1) $\overline{A} = A \cup A'$; deduceți că $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \subset A$

2) $FrA = \overline{A} \setminus \text{int}\, A$.

Ind. 1)Demonstrăm prin dublă incluziune, folosind definițiile punctului aderent, respectiv punctului de acumulare; ținem seama de propoziția II.2.3.

2) $FrA = \overline{A} \cap C\overline{A} = \overline{A} \cap C(intA) = \overline{A} \setminus intA$.

II.2.3. Să se determine A_i', $intA_i$, $\overline{A_i}$, FrA_i în $\boldsymbol{R}$ dacă :

$A_1 = \{1,2,3\}$; $A_2 = [1,2) \cup [3,4] \cup (5,6) \cup \{7\}$; $A_3 = \boldsymbol{Q}$; $A_4 = \{\frac{1}{2^n}; n \in N^*\}$

Ind. $A_1' = \phi$, $intA_1 = \phi$, $\overline{A_1} = \{1,2,3\}$, $FrA_1 = \{1,2,3\}$;

$A_2' = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6]$, $intA_2 = (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$,

$\overline{A_2} = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6] \cup \{7\}$, $FrA_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

$A_3' = \boldsymbol{R}$, $intA_3 = \phi$, $\overline{A_3} = \boldsymbol{R}$, $FrA_3 = \boldsymbol{R}$;

$A_4' = \{0\}$, $intA_4 = \phi$, $\overline{A_4} = \{\frac{1}{2^n}; n \in N^*\} \cup \{0\} = FrA_4$.

II.2.4. Fie $A \subset \boldsymbol{R}$; arătați că:

1) $\overline{A} = A \cup FrA$

2) $int\, A = A \setminus FrA$

deduceți apoi că: i) $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow FrA \subset A$; ii) $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow A \cap FrA = \phi$.

Ind. 1) $A \cup FrA = A \cup (\overline{A} \cap C) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup C\overline{A}) = \overline{A} \cap \boldsymbol{R} = \overline{A}$;

2) $A \setminus FrA = A \cap C(\overline{A} \cap C(int\, A)) = A \cap (C\overline{A} \cup int\, A) = int\, A$.

II.2.5 Fie $A \subset \boldsymbol{R}$ o mulțime mărginita și nevidă. Putem afirma ca A este închisă daca $\inf A$ și $\sup A \in A$? Verificați că $\inf A$ și $\sup A \in FrA$.

Ind. Folosim exercițiul II.2.4 și propoziția II.2.4

II.2.6. Arătați că mulțimea $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale nu este conexă.

Ind. Există mulțimile deschise , disjuncte $U = (-\infty, \alpha)$ și $V = (\alpha, +\infty)$ unde α este număr irațional astfel încât $U \cap \boldsymbol{Q} \neq \phi$, $V \cap \boldsymbol{Q} \neq \phi$, $\boldsymbol{Q} \subset U \cup V$.

Scanned with OKEN Scanner

II.3. *Serii*

II.3.1. Să se stabilească, cu ajutorul definiției, natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; c) $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n+1}{n}$; d) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{\alpha^n}$, $|\alpha|>1$.

Ind. a) $s_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow$ seria este convergentă și are suma $s=1$;

b) $s_n=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})\Rightarrow$ seria convergentă și $s=\frac{3}{2}$;

c) $s_n=\ln(n+1)\Rightarrow$ seria este divergentă

d) $s_n=\frac{n-\alpha(n+1)+\alpha^{n+1}}{\alpha^n(1-\alpha)^2}\Rightarrow$ seria este convergentă și $s=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, deoarece $|\alpha|>1$.

II.3.2. Utilizând criteriul de convergență a lui Cauchy să se stabilească natura seriilor:

a) $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin nx}{2^n}$, $x\in R$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Ind. a) Evaluăm:

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin(n+k)x}{2^{n+k}}\right|<\sum_{k=1}^{p}\left|\frac{\sin(n+k)x}{2^{n+k}}\right|<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n};$$

cum $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, rezultă că seria converge;

b) din criteriul lui Cauchy rezultă că o condiție necesară de convergență a unei serii este ca termenul său general să conveargă la zero, așadar $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ implică divergența seriei date.

II.3.3. Stabiliți natura seriilor următoare, folosind primul criteriu de comparație:

a) $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{\pi}{2^n}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{3n}{n^2-1}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; d) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

e) $\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$; f) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n-1).2^{n-1}}$; g) $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n^2+1}$;

Ind. a) $\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}\Rightarrow$ convergența seriei;

b) $\frac{3n}{n^2-1}>\frac{3}{n}\Rightarrow$ serie divergentă;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{2n^{3/2}}\Rightarrow$ convergenţa seriei;

d) $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n},\forall n\geq 2\Rightarrow$ divergenţa seriei (conform exerciţiului anterior);

e) $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{n^2}\Rightarrow$ convergenţa seriei;

f) $\frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}<\frac{1}{2^{2n-1}}\Rightarrow$ convergenţa seriei;

g) $\frac{n+1}{n^2+1}>\frac{1}{n+1}\Rightarrow$ divergenţa seriei.

II.3.4. Stabiliţi natura seriilor următoare, folosind al doilea criteriu de comparaţie:

a) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{1}{n!}$; b) $1+\sum_{n\geq 2}(2-\sqrt{e}),(2-\sqrt[3]{e})...(2-\sqrt[n]{e})$.

Ind. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}>\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\Rightarrow$ divergenţa seriei;

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-\sqrt[n+1]{e}>2-\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}\Rightarrow$ seria este divergentă

II.3.5. Stabiliţi natura seriilor următoare, folosind al treilea criteriu de comparaţie;

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(an+b)^\alpha}$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$, $a>0$, $b>-a$;

c) $\sum_{n\geq 1}\sin^\alpha\frac{a}{n}$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$, $a\in(0,\pi)$; d) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

Ind. a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow$ divergenţa seriei;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(an+b)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{1}{a^\alpha}\Rightarrow$ seria are aceeaşi natură cu seria armonică generalizată;

c) analog;

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})}{\frac{1}{n}}=1 \Rightarrow$ divergența seriei.

II.3.6. Studiați natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^n+n}$, $a>-1$: b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}$, $a>0$.

Ind. a) Distingem două cazuri:

$\frac{1}{a^n+n}<\frac{1}{a^n}$, dacă $a>1$, deci seria este convergentă , conform primului criteriu de comparație;

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+n}}{\frac{1}{n}}=1$, pentru $|a|<1$, astfel, pe baza criteriului al treilea de comparație seria este divergentă.

b) Pentru $a>1$, avem $\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}<\frac{1}{a^n}$, rezultând convergența seriei;

dacă $a=1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$, serie convergentă;

dacă $a\in(0,1)$, aplicăm criteriul al treilea de comparație și avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+...+a^n)}}{\frac{1}{n}}=1-a,$$ deci seria este divergentă.

II.3.7. Fie $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ și $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n\in N^*$; să se arate că $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$; totuși seriile $\sum_{n\geq 1}a_n$, $\sum_{n\geq 1}b_n$ nu au aceeași natură. Cum se explică?

Ind. Seria $\sum_{n\geq 1}b_n$ este convergentă (criteriul lui Leibniz), seria $\sum_{n\geq 1}a_n$ este divergentă deoarece seria $\sum_{n\geq 1}(b_n-a_n)$ este divergentă. Criteriul al treilea de comparație nu se aplică, deoarece cele două serii nu au toți termenii pozitivi.

II.3.8. Utilizând criteriul de condensare al lui Cauchy, stabiliți natura seriei

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n.(\ln n)^p},\ p>0$$

Ind. Seria $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n.(\ln n)^p}$ are aceeași natură cu seria

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{n\geq 2}\frac{2^n}{2^n.(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\cdot\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^p},$$

şi astfel este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\in(0,1)$.

II.3.9 Studiaţi, cu ajutorul criteriului raportului, natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+1)!}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.5.8...(3n-1)}$;

d) $\sum_{n\geq 1}n.a^n, a>0$; e) $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}, a>0$; f) $\sum_{n\geq 1}\frac{(a.n)^n}{n!}, a>0$;

g) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{3^n}$; h) $\sum_{n\geq 0}n^2.\sin\frac{\pi}{2^n}$; i) $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!}{3^n.n!}$.

Ind. a) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n.(n+2)}=0\Rightarrow$ seria este convergentă;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1).(2n+2)}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ convergenţa seriei;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ convergenţa seriei:

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.a=a$, rezultând convergenţa seriei pentru $a\in(0,1)$, divergenţa pentru $a>1$; daca $a=1$, obţinem seria divergentă $\sum_{n\geq 1}n$;

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{n+1}}=0\Rightarrow$ convergenţa seriei;

f) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a.\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=a.e$, rezultând convergenţa seriei pentru $a\in(0,1/e)$, divergenţa pentru $a>1/e$; pentru $a=1/e$, a se vedea problema II.3.4, a).

II.3.10. Câţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{(n+1)!}$ cu trei zecimale exacte?

Ind. Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+2}<\frac{1}{3}, \forall n>4$ avem $R_n=s-s_n<\frac{a_n.k}{1-k}$, unde $k=1/3$;

aşadar $R_n<\frac{2^{n-1}}{(n+1)!}<\frac{1}{10^3}$, inegalitatea fiind satisfăcută pentru $n=10$; deci $s\approx s_{10}$.

Remarcă

Să scriem în continuare un program (pentru începători) în Pascal care să ilustreze acest tip de probleme: se dă o serie a cărei convergenţă se demonstrează folosind criteriul raportului;(ştiind că $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq k<1$, conform celor demonstrate la curs avem: $R_n=s-s_n<\frac{a_n.k}{1-k}$); pentru diferite valori ale erorii, programul indică s_{n_0} ce aproximează suma seriei, şi calculează această valoare aproximativă

Scanned with OKEN Scanner

```
uses crt;
var k,x,eps:real;
   ind,n:integer;
   ok:boolean;
   c:char;
function putere(a,m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
         put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function factorial(m:integer):real;
      var i:integer;
         p:real;
      begin
      p:=1;
      for i:=1 to m do
         p:=p*i;
      factorial:=p;
      end;
function serie(m:integer):real;
      begin
      serie:=putere(2,m)/factorial(m+1);   {m/3^m}
      end;
function s(m:integer):real;
      var ss:real;
         i:integer;
      begin
      ss:=0;
      for i:=1 to m do
         ss:=ss+serie(i);
      s:=ss;
      end;

begin {pp}
clrscr;
k:=2/3;        {a[n+1]/a[n]=2/(n+1)<2/3<1}
{pentru seria cu termenul general m/3^m, k=1/2}

repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
      begin
      write('Dati eroarea:');read(eps);
      x:=eps*(1-k)/k;
      ind:=1;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
        ok:=true;
        while ok do
            begin
            if abs(seric(ind)-x)<x then
              begin
              writeln('Termenul S',ind,' aproximeaza suma seriei cu eroarea data.');
              write('S=',s(ind):6:4,' cu eroarea ',eps:6:4,'.');
              ok:=false;
              end;
            ind:=ind+1;
            end;
        writeln;
        end;
until c='n';

readln;
end.
```

1). $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{(n+1)!}$

Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
Termenul S5 aproximeaza suma seriei cu eroarea data.
S=2.1778 cu eroarea 0.1000.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Termenul S7 aproximeaza suma seriei cu eroarea data.
S=2.1937 cu eroarea 0.0100.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.001
Termenul S8 aproximeaza suma seriei cu eroarea data.
S=2.1944 cu eroarea 0.0010.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.0001
Termenul S10 aproximeaza suma seriei cu eroarea data.
S=2.1945 cu eroarea 0.0001.

se observă rapiditatea convergenței acestei serii (dacă s_{10} aproximează suma seriei cu 3 zecimale exacte)

2). $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n}$

Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
Termenul S3 aproximeaza suma seriei cu eroarea data.
S=0.6667 cu eroarea 0.1000.

Scanned with OKEN Scanner

Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Termenul S6 aproximeaza suma serici cu eroarea data.
S=0.7449 cu eroarea 0.0100.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.001
Termenul S8 aproximeaza suma serici cu eroarea data.
S=0.7493 cu eroarea 0.0010.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.0001
Termenul S10 aproximeaza suma serici cu eroarea data.
S=0.7499 cu eroarea 0.0001.

(şi această serie converge rapid)

II.3.11. Stabiliţi natura seriilor următoare, folosind criteriul rădăcinii:

a) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^n}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$; c) $\sum_{n\geq 1}a^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $a>0$;

d) $\sum_{n\geq 1}\left(a.\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a>0$.

Ind. a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0\Rightarrow$ convergenţa seriei;

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{4}=\frac{e}{4}$ $\Rightarrow$ seria este convergentă;

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}a\left(1+\frac{1}{n}\right)=a$, rezultând că pentru $a\in(0,1)$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$, obţinem seria $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, care este divergentă.

d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2}.a=a$, rezultând că pentru $a\in(0,1)$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$, obţinem seria $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, care este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n=e$.

II.3.12. Studiaţi natura seriilor următoare, folosind criteriul Raabe -Duhamel:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, unde am notat $(2n\text{-}1)!!=1.3.5\ldots(2n\text{-}1)$ şi $(2n)!!=2.4.6\ldots(2n)$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$

Ind. a) Deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, vom calcula $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{2}$, rezultând divergența seriei;

b) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow$ convergența seriei.

II.3.13. Demonstrați că următoarele șiruri au limita zero:

$$a_n=\frac{n^n}{(2n)!};\qquad b_n=\frac{(n!)^n}{n^{n^2}};\qquad c_n=\frac{n^n}{(n!)^2}.$$

Ind. Este suficient să arătăm că seriile $\sum_{n\geq 1}a_n$, $\sum_{n\geq 1}b_n$, $\sum_{n\geq 1}c_n$ sunt convergente.

II.3.14. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^p}$, $x\in(0,\pi)$

Ind. Deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|<\frac{1}{n^p}$, seria este absolut convergentă pentru $p>1$; pentru a studia convergența simplă aplicăm criteriul lui Abel (propoziția II.3.9) luând $x_n=\cos nx$ și $\alpha_n=\frac{1}{n^p}$.

II.3.15. Să se arate că seria armonică alternată $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ este convergentă și să se calculeze suma ei. Câți termeni trebuie însumați, pentru a obține suma seriei cu trei zecimale exacte?

Ind. Se aplică criteriul lui: Leibniz ; se arată ușor că $s_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ și astfel $\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\ln 2$. Cum $|R_n|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10^3}$ obținem $n>999$.

II.3.16. Să se arate că seria $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\lg^2 n}$ este convergentă și să se determine numărul de termeni ce trebuie însumați pentru a obține suma seriei cu două zecimale exacte.

Ind. Vom obține $n>20960$, ceea ce arată că seria converge lent.

Dăm un program care ilustrează modul de aproximare a sumei unei serii alternate $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, serie a cărei convergență am demonstrat-o cu criteriul lui Leibniz; conform teoriei studiate, prin aproximarea sumei seriei cu s_n eroarea comisă este mai mică decât a_{n+1}; rulăm programul pentru seriile din problemele II.3.15-16

Scanned with OKEN Scanner

```
program serii  2;
uses crt;
var k,eps,test:real;
   n:integer;
   ind:integer;
   ok:boolean;
   c:char;
function putere(a,m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
         put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function factorial(m:integer):real;
      var i:integer;
         p:real;
      begin
      p:=1;
      for i:=1 to m do
         p:=p*i;
      factorial:=p;
      end;
function serie(m:integer):real;
      begin
      serie:=1/m;   {(ln(m)*ln(m))}
      end;
begin {pp}
clrscr;
repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
      begin
      write('Dati eroarea:');read(eps);
      ind:=1;
      ok:=true;
      while ok do
          begin
          test:=serie(ind+1);
          if abs(serie(ind+1)-eps)<eps/100 then
            begin
            write(ind);
            ok:=false;
            end;
          ind:=ind+1;
          end;
       writeln;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
    end;
until c='n';
readln;
end.
```

1). $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}$

```
Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
9
Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
99
Mai doriti?
Dati eroarea:0.001
990
Mai doriti?
Dati eroarea:0.0001
9900
```

2). $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$

```
Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
23
Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
20960
```

Este clar că această serie converge lent.

II.3.17 Stabiliţi natura seriei $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}.\frac{\log_a n}{n}$, $a>1$.

II.3.18. Stabiliţi natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in R \setminus N$.

Ind. $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{|n-\alpha|}{n+1}$, ceea ce implică utilizarea criteriului Raabe-Duhamel în studiul convergenţei absolute: $\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha}=\alpha+1$; deci pentru $\alpha \geq 0$ seria este absolut convergentă.

Pentru $\alpha < 0$, scriem $x_n=(-1)^n.\frac{(-\alpha).(1-\alpha)...(n-\alpha-1)}{n!}$; aşadar avem o serie alternată. Notând $a_n=\frac{(-\alpha).(1-\alpha)...(n-\alpha-1)}{n!}$, observăm că pentru $\alpha \leq -1$ şirul $(a_n)_n \subset R_+$ este crescător, limita sa fiind astfel nenulă, deci seria este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\alpha \in (-1,0)$ şirul $(a_n)_n$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent; să arătam că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Determinăm un şir $(b_n)_n$, astfel încât $a_n = \frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n}$; rezultă că $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. Avem $b_n = na_n - (n-1)a_{n-1} = (-\alpha).a_{n-1}$, ceea ce implică $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; condiţiile criteriului lui Leibniz fiind îndeplinte seria este semiconvergentă.

II.3.19 Studiaţi natura seriilor următoare :

a) $\sum_{n\geq 2} x^n . tg\frac{x}{2^n}$, x fiind un parametru real; b) $\sum_{n\geq 1} \ln^n \alpha$, $\alpha > 0$.

Ind. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}.tg\frac{x}{2^{n+1}}|}{|x^n.tg\frac{x}{2^n}|} = \frac{|x|}{2}$ şi astfel pentru $|x| < 2$ seria este absolut convergentă; pentru $|x| \geq 2$ este divergentă.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ln^n \alpha|} = |\ln\alpha|$; pentru $|\ln\alpha| < 1$ seria este absolut convergentă şi pentru $|\ln\alpha| \geq 1$ seria este divergentă.

II.3.20. Dacă seriile $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n^2$ sunt convergente, atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n.b_n$ este absolut convergentă.

Ind. Folosim primul criteriu de comparaţie şi inegalitatea

$$|a_n.b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2).$$

II.3.21. Să se arate ca seriile

$$1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ şi } 1 - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

sunt divergente, dar produsul lor in sens Cauchy este o serie convergentă.

Ind. $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

II.3.22. Să se calculeze produsul seriilor absolut convergente $1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$, $1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}$ şi să se deducă suma seriei $1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}$.

Ind. $c_0 = 1, \ldots, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$, $\forall\, n \geq 1$; aşadar suma seriei produs în sens Cauchy este 1, şi astfel

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

III. FUNCTII REALE DE VARIABILA REALA

III 1. *Funcţii continue.*

III.1.1. Fie $f, g: A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, $a \in A'$, astfel încât: $|f(x)| \le g(x)$, $\forall\, x \in A$ demonstraţi că dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

III.1.2. Studiaţi existenţa limitei următoarelor funcţii în zero :

a) $f: \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$;

b) $g: \boldsymbol{R} \to \{0,1\}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in R \setminus Q \end{cases}$;

c) $h: \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \to R$ $\quad h(x) = x.\ \sin\dfrac{1}{x}$.

Ind. In cazurile a), b) nu există limita, conform propozitiei III.1.1; în cazul c) limita este zero, pe baza problemei precedente.

III.1.3. Funcţia $f: (0,1] \to \boldsymbol{R}$ este mărginită ; definim funcţia $g: (0,1] \to \boldsymbol{R}$ prin $g(x) = x^{\alpha}.f(x)$, $\alpha > 0$. Arătaţi că funcţia g are limita la dreapta în punctul $x = 0$.

Ind. Folosim criteriul lui Cauchy (propoziţia III.1.2) ; şi arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$, pentru orice $x', x'' \in (0, \delta)$.

Fie $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$, $\forall\, x \in (0,1]$. Evaluând:

$|g(x') - g(x'')| \le |x'|^{\alpha}.|f(x')| + |x''|^{\alpha}.|f(x'')| \le M(|x'|^{\alpha} + |x''|^{\alpha})$, obţinem:

$\exists\, \delta = (2M)^{-\frac{1}{\alpha}}.\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ astfel încât $\forall\, x', x'' \in (0,\delta)$ avem $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$.

III.1.4 Fie funcţiile $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continue. Să se determine punctele de continuitate ale funcţiei $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q \\ g(x), x \in R \setminus Q \end{cases}$.

Ind. Fie $x_0 \in \boldsymbol{R}$; considerăm şirul $(r_n)_n \subset \boldsymbol{Q}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$ şi respectiv şirul $(x_n)_n \subset \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; avem : $h(r_n) = f(r_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$ şi $h(x_n) = g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(x_0)$.

Conform propoziţiei III.1.5. x_0 este punct de continuitate dacă $f(x_0) = g(x_0)$. Aşadar mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei h este $\{x \in \boldsymbol{R};\ f(x) = g(x)\}$.

III.1.5. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\in R\setminus Q\end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases}x, x\in Q\\ 1-x, x\in R\setminus Q\end{cases}$;

c) $h(x)=\begin{cases}x^2, x\in Q\\ 1-x^2, x\in R\setminus Q\end{cases}$.

Ind. Este o aplicație imediată a problemei anterioare.

III.1.6. a) Să se arate că dacă $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$, $q_n>0$ este un șir convergent neconstant de numere raționale, atunci $\lim_{n\to\infty} q_n=\infty$.

b) Folosind rezultatul de la a) să se studieze continuitatea funcției lui Riemann $F:[0,1]\to R$,

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, x=\frac{p}{q}\in Q, p,q\in N^*, (p,q)=1\\ 0, \quad x\in((0,1]\setminus Q)\cup\{0\}\end{cases}$$

Ind. a) Presupunând că șirul $(q_n)_n$ ar fi mărginit, rezultă că mulțimea termenilor șirului $\{q_n\}$ este finită; astfel mulțimea termenilor șirului $\{p_n\}$ este finită, deoarece șirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ fiind convergent este mărginit Din convergența șirului $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ rezultă că începând de la un anumit rang încolo avem $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_n}{q_n}$, ceea ce înseamnă că șirul este constant.

b) Fie $x_0\in[0,1]$ și $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n\subset[0,1]\cap Q$, $(p_n,q_n)=1$, cu $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=x_0$, deci $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}=0$; fie $(x_n)_n\subset[0,1]\setminus Q$ cu $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

In orice punct din $[0,1]$ funcția are limita zero, așadar este continuă în toate punctele iraționale din acest interval și discontinuă în rest.

III.1.7. Fie $f:R\to R$ o funcție continuă; arătați că $\forall A\subset R$ avem $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

In particular, o funcție $f:R\to R$ continuă, a cărei restricție la mulțimea numerelor raționale este constantă, este constantă

Ind. Fie $y\in f(\overline{A})$; există $x\in\overline{A}$ astfel încât $y=f(x)$. Conform teoremei II.2.3, există un șir $(x_n)_n\subset A$, astfel încât $\lim_{n\to\infty}x_n=x$; rezultă existența șirului $(f(x_n))_n\subset f(A)$, a cărui limită este $f(x)=y$, datorită continuității lui f; așadar $y\in\overline{f(A)}$.

Având $f(\overline{Q})\subset\overline{f(Q)}$ rezultă $f(R)\subset\{\alpha\}$; (am presupus că $f_Q=\alpha$).

Scanned with OKEN Scanner

III.1.8. O funcție $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, continuă, cu proprietatea că $\forall n \subset \boldsymbol{N}$, și $\forall x \subset \boldsymbol{R}$ avem $f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$, este constantă.

Ind. Vom demonstra prin inducție după m că: $f\left(x+\frac{m}{n}\right)=f(x), x\in \boldsymbol{R}, n, m\in \boldsymbol{N}$

Dând lui x valorile $x=0$, $x=m/n$, obținem $f(r)=f(0)$, $\forall r \in \boldsymbol{Q}$. În continuare se aplică problema precedentă.

III.1.9. O funcție $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continuă, ce admite un șir de perioade convergent la zero este constantă.

Ind Există $(T_n)_n \subset \boldsymbol{R}$, astfel încât $f(x+T_n)=f(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$ și în plus $\lim_{n\to\infty} T_n=0$.

Fie $x\in \boldsymbol{R}$; cum $\frac{x}{T_n}=\left[\frac{x}{T_n}\right]+\varepsilon_n$, unde $\varepsilon_n \in [0,1)$, deducem

$$f(x)=f\left(T_n\cdot\left[\frac{x}{T_n}\right]+T_n.\varepsilon_n\right)=f(T_n.\varepsilon_n);$$

trecem la limită $n\to\infty$, în această egalitate și datorită continuității lui f, obținem $f(x)=f(0)$; x a fost arbitrar ales, deci $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(x)=f(0)$.

III.1.10. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție continuă; fie $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Arătați că $F_\alpha=\{x\in\boldsymbol{R}; f(x)=\alpha\}$ este o mulțime închisă.

Ind. Remarcând că $F_\alpha=f^{-1}(\{\alpha\})$, aplicăm teorema III.1.1, ținând seama că $\{\alpha\}$ este mulțime închisă în $\boldsymbol{R}$.

III.1.11. Fie $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funcții continue. Arătați că $D=\{x\in\boldsymbol{R}; f(x)<g(x)\}$ este mulțime deschisă, în timp ce $F_1=\{x\in\boldsymbol{R}; f(x)\le g(x)\}$ și $F_2=\{x\in\boldsymbol{R}; f(x)=g(x)\}$ sunt mulțimi închise.

Ind. Construim funcția $h=f-g$, funcție ce este continuă; aplicăm teorema III.1.1, ținând seama că $D=h^{-1}((-\infty,0))$, $F_1=h^{-1}((-\infty,0])$ și $F_2=h^{-1}(\{0\})$

III.1.12. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$; f este funcție continuă pe $\boldsymbol{R}$ dacă și numai dacă $\forall J \subset \boldsymbol{R}$, interval deschis avem $f^{-1}(J)$ mulțime deschisă.

Ind. Este o aplicație imediată a teoremei III.1.1 și a propoziției II.2.1 (de caracterizare a mulțimilor deschise din $\boldsymbol{R}$): fie $D \in \mathcal{D}$, atunci există o familie cel mult numărabilă $(J_i)_{i\in I}$ de intervale deschise, disjuncte două câte două, astfel încât $D=\bigcup_{i\in I} J_i$ și astfel

$$f^{-1}(D)=f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} J_i\right)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(J_i),$$

care este mulțime deschisă, deoarece reuniune arbitrară de mulțimi deschise este deschisă.

III.1.13. Fie $f: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ o funcție continuă, care are limite finite în a și b; arătați că f este mărginită. Reciproca este adevărată?

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Notăm $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ şi $\lim_{x \to b} f(x) = l_2$; fie $\varepsilon = 1$, conform definiţiei limitelor laterale există $\delta_1, \delta_2 > 0$ astfel încât $\forall\, x \in (a,\ a + \delta_1)$ şi respectiv $\forall\, x \in (b - \delta_2,\ b)$ avem $|f(x) - l_1| < 1$ şi respectiv $|f(x) - l_2| < 1$.

Pe compactul $[a + \delta_1,\ b - \delta_2]$, f fiind continuă, este mărginită, adică există m_1, M_1 astfel încât $m_1 \le f(x) \le M_1,\ \forall\, x \in [a + \delta_1,\ b - \delta_2]$. In concluzie luând

$$m = \min\{l_1 - 1,\ l_2 - 1,\ m_1\} \text{ şi } M = \max\{l_1 + 1,\ l_2 + 1,\ M_1\}$$

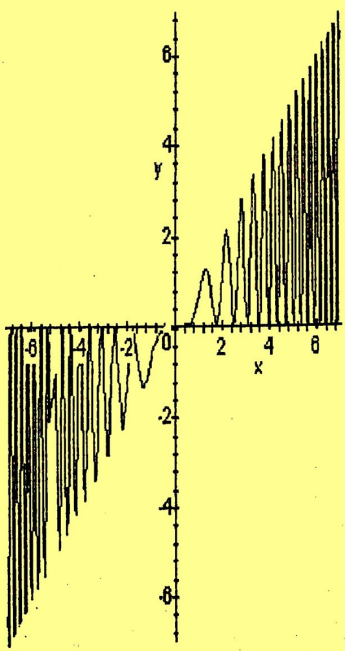
avem : $m \le f(x) \le M,\ \forall\, x \in (a,\ b)$.

Reciproca nu este adevărată: funcţia $f : (0,1) \to \boldsymbol{R}$ $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ este continuă şi mărginită, dar nu are limită în $x = 0$.

III.1.14. Arătaţi că o funcţie continuă $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ce admite asimptote orizontale la $\pm\infty$ este mărginită.

III.1.15. Să se studieze, cu ajutorul definiţiei, continuitatea uniformă a funcţiei: $f(x) = x \cdot \sin^2 x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$; în prealabil merită desenat (în MapleV) graficul funcţiei

```
> plot(x*(sin(x^2))^2,x=-7..7,y=-7..7);
```



Scanned with OKEN Scanner

Ind. Se consideră $x_n' = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ şi $x_n'' = \sqrt{n\pi}$, puncte în care $\sin^2 x^2$ ia valoarea 1 respectiv 0; avem $|x_n' - x_n''| = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}\right)}$, diferenţă ce poate fi făcută oricât de mică (mai mică decât orice δ), alegând un n suficient de mare. În acelaşi timp avem: $|f(x_n') - f(x_n'')| = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \to \infty$, ceea ce arată că f nu este uniform continuă pe $\boldsymbol{R}$.

Remarcă

Funcţia $g(x) = x\cos^2 x^2$ nu este uniform continuă pe $\boldsymbol{R}$, dar $f(x) + g(x) = x$ este uniform continuă pe $\boldsymbol{R}$; deci suma a două funcţii care nu sunt uniform continue poate fi o funcţie uniform continuă.

Să se arate că suma a două funcţii uniform continue este o funcţie uniform continuă

III.1.16. Fie $a \geq 0$ şi $f: (a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \ln x$, $x > a$. Să se arate că f este uniform continuă dacă şi numai dacă $a > 0$.

Ind. Dacă $a > 0$, f este lipschitziană, deoarece aplicând teorema creşterilor finite pe intervalul $[x,y]$ funcţiei $f(x) = \ln x$, obţinem: $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{a}|x - y|$

Reciproc, presupunem că $a = 0$; luăm $\varepsilon = \ln 2$, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2n}$, cu $n \in N$ suficient de mare astfel încât $\forall\ \delta > 0$ să avem $|x_n - y_n| < \delta$. În aceste condiţii $|f(x_n) - f(y_n)| = \ln 2$, aşadar f nu este uniform continuă.

III.1.17. Să se arate că orice polinom $P: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ este o funcţie lipschitziană

Ind. Fie $x,y \in [a,b]$; din identitatea împărţirii polinoamelor, avem:

$$P(x) = (x - y)Q(x) + P(y).$$

Aşadar

$$|P(x) - P(y)| \leq \sup_{[a,b]}|Q(x)|\,|x - y|.$$

III.1.18. Să se determine care dintre funcţiile de mai jos sunt uniform continue:

1) $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0,2)$;

2) $f_2(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

3) $f_3(x) = \cos^2 x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

4) $f_4(x) = e^{-|x|}\ln(1 + x^2)$, $x \in \boldsymbol{R}$

5) $f_5(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

6) $f_6(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

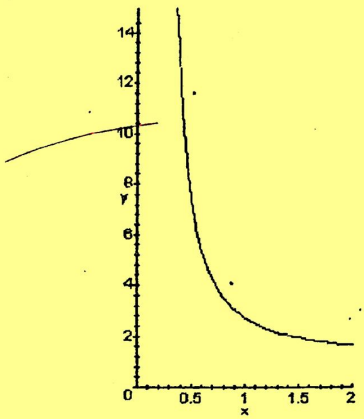
7) $f_7(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

8) $f_8(x) = x + \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

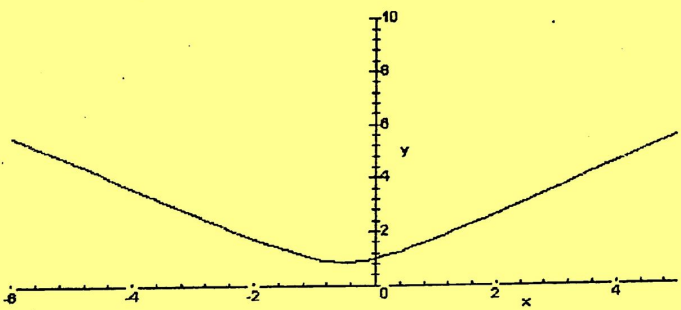
Desenaţi-le graficele (în Maple)

Scanned with OKEN Scanner

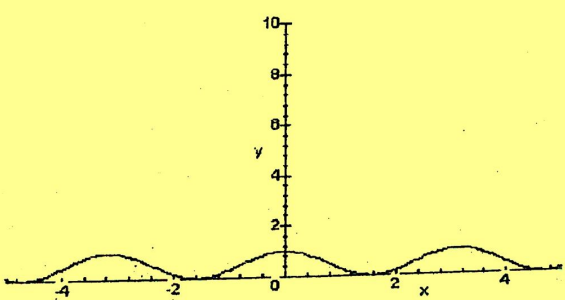
1) $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0,2), 2)$ **> plot(exp(1/x), x=0..2,y=0..15);**



2) $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, $x \in R$; **> plot(sqrt(x^2+x+1), x=-5..5,y=0..10);**



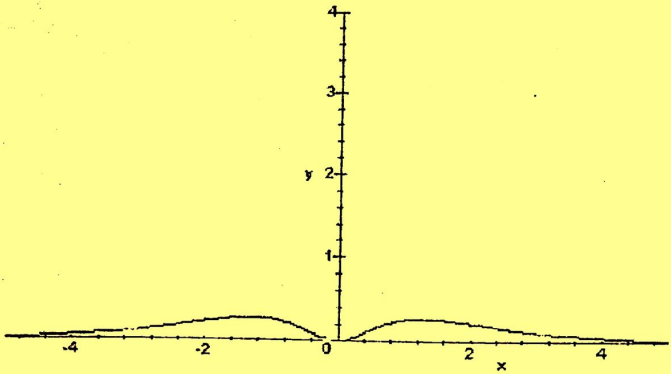
3) $f_3(x) = \cos^2 x$, $x \in R$; **> plot((cos(x))^2,x=-5..5,y=0..10);**



Scanned with OKEN Scanner

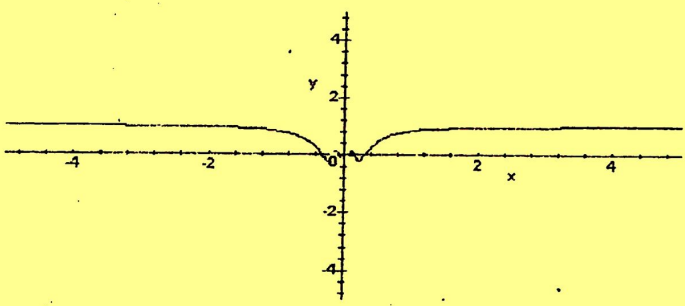
4) $f_4(x) = e^{-|x|}\ln(1+x^2),\ x \in R$

```
> plot(exp(-abs(x))*ln(1+x^2),x=-5..5,y=0..4);
```



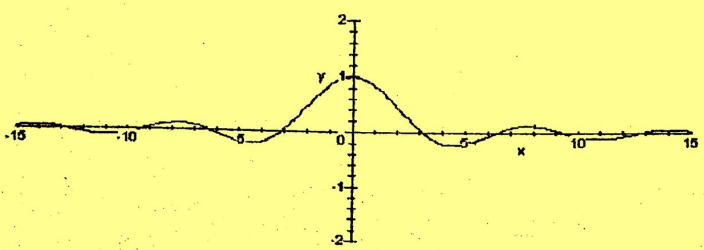
5) $f_5(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases},\ x \in R;$

```
> plot(x*sin(1/x), x=-5..5,y=-5..5);
```



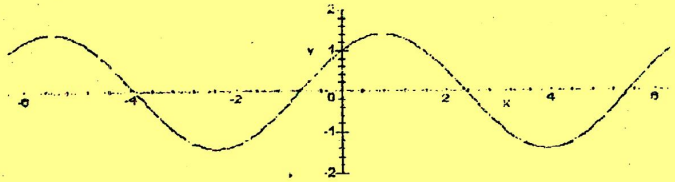
6) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases},\ x \in R;$

```
> plot((sin(x))/x,x=-15..15,y=-2..2);
```

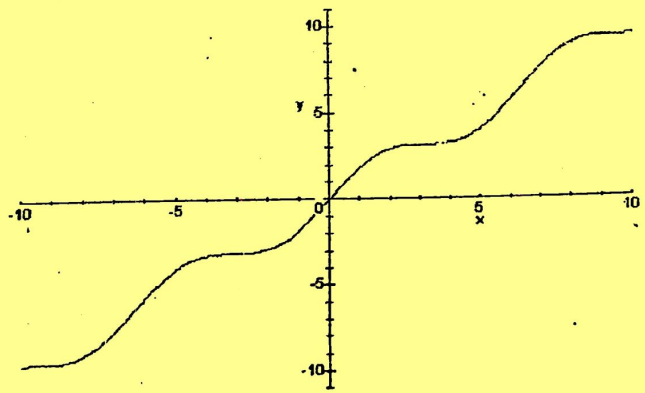


Scanned with OKEN Scanner

7) $f_7(x) = \sin x + \cos x$, $x \in R$; > plot(sin(x)+cos(x),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2);



8) $f_8(x) = x + \sin x$, $x \in R$... > plot(x+sin(x),x=-10..10,y=-11..11);



Ind. Se arată cu ajutorul definiției că f_1 nu este uniform continuă pe $(0,1)$; f_2, f_4, f_5, f_6 sunt uniform continue pe R, fiind funcții continue pe R, ce admit asimptote la $-\infty$ și la $+\infty$; f_3, f_7 fiind continue și periodice pe R sunt uniform continue; f_8 nu este periodică, nu are asimptote la $-\infty$ și la $+\infty$, dar este lipschitziană fiind astfel uniform continuă.

III.1.19. Fie, $A \subset R$ o mulțime relativ compactă și $f : A \to R$; să se demonstreze că f are o prelungire continuă pe $\overline{A}$ dacă și numai dacă f este uniform continuă pe A.

Ind. Fie f prelungirea continuă a funcției f pe A (mulțime compactă); f este uniform continuă pe $\overline{A}$ și orice restricție a sa este uniform continuă, respectiv f este uniform continuă.

Reciproc, fie f uniform continuă pe A ; este suficient să arătăm că f are limita finită în orice punct $x \in \overline{A} \setminus A$. Fie $(x_n)_n \subset A$, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; fie $\varepsilon > 0$, din definiția uniform continuității funcției f există $\delta > 0$ astfel încât $\forall x', x'' \in A$ cu $|x'-x''| < \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $(x_n)_n$ este şir Cauchy există $n_0 \subset N$ astfel încât $\forall\ m,\ n \geq n_0$ avem $|x_n - x_m| < \delta$; atunci $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ şi astfel şirul $(f(x_n))_n \subset R$ este şir Cauchy, deci convergent, rezultând că f are limită în x.

III.1.20. Fie $a,\ b \in R,\ a < b$, şi $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcţie continuă . Arătaţi că f admite un punct fix (e.g. $\exists\ x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$).

Ind. Vom considera funcţia $g : [a,b] \to R$, $g(x) = f(x) - x$, funcţie ce este continuă. Cum $f(a), f(b) \in [a,b]$ avem $g(a).g(b) < 0$şi astfel conform teoremei valorii intermediare, $\exists\ x_0 \in [a,b]$ astfel încât $g(x_0) = 0$.

III.1.21. Fie $f : [a,b] \to R$ o funcţie continuă, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ Arătaţi că există $\xi \in [a,b]$, astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Ind. f fiind continuă pe $[a,b]$ este mărginită, aşadar există $m,\ M \in R$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M,\ \forall\ x \in [a,b]$; atunci $m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq M$. Pe de altă parte $f([a,b]) = [m,M]$ şi astfel există $\xi \in [a,b]$, astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

III.1.22. Fie $f : R \setminus \{0\} \to R$ definită prin $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; arătaţi că

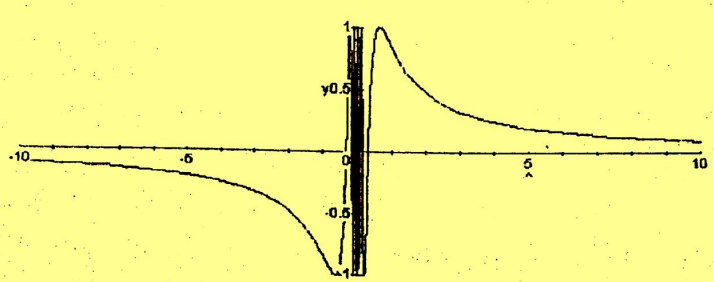
a) în orice vecinătate a originii funcţia ia de o infinitate de ori valorile –1,0,1;

b) nu există $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$; calculaţi $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$; schiţaţi pe baza celor demonstrate graficul funcţiei;

b) demonstraţi că funcţia $f : R \to R$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ are proprietatea valorii intermediare dacă şi numai dacă $|a| \leq 1$;

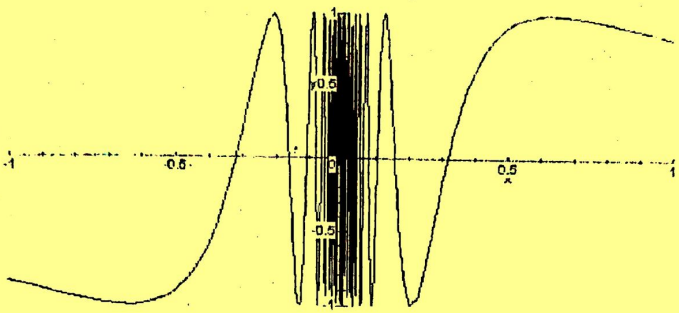
d) desenaţi în Maple V graficul funcţiei; studiaţi graficul restricţiei la [-1,1], observând eventualele greşeli.

> plot(sin(1/x),x=-10..10,y=-1..1);



Scanned with OKEN Scanner

```
> plot(sin(1/x),x=-1..1,y=-1..1);
```



Ind. Din rezolvarea ecuației $\sin\frac{1}{x} = 0$, obținem $x = \frac{1}{n\pi}$; fie $V \in \mathcal{V}(0)$, $V \cap \{\frac{1}{n\pi}, n \in \boldsymbol{N}\} = \{\frac{1}{n\pi}, n \geq n_0\}$; analog se demonstrează celelalte două afirmații.

Trebuie arătat că imaginea prin f a oricărui interval $I \subset \boldsymbol{R}$ este tot un interval; merită discutat doar cazul intervalului ce conține originea, caz în care există $k_0 \in \boldsymbol{N}$ astfel încât: $[\frac{2}{\pi(4k-1)}, \frac{2}{\pi(4k+1)}] \subset I \subset \boldsymbol{R}$, $\forall\, k > k_0$; atunci

$$[-1,1] = f([\frac{2}{\pi(4k-1)}, \frac{2}{\pi(4k+1)}]) \subset f(I) \subset f(\boldsymbol{R}) = [-1,1],$$

deci $f(I) = [-1,1]$.

La graficul în Maple se observă că există $k_0 \in \boldsymbol{N}$ astfel încât

$$f([\frac{2}{\pi(4k_0-1)}, \frac{2}{\pi(4k_0+1)}]) \neq [-1,1]$$

Scanned with OKEN Scanner

III.2. *Derivabilitatea unei funcții într-un punct.*

III.2.1. Calculați derivata funcției: $f(x)=[x].\sin^2 \pi x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Ind. Funcția f poate fi scrisă:

$$f(x)=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ -n\sin^2 \pi x, x \in [-n,-n+1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ -\sin^2 \pi x, \quad x \in [-1,0) \\ 0, \quad x \in [0,1) \\ \sin^2 \pi x, \quad x \in [0,1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ n\sin^2 \pi x, x \in [n,n+1) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Pentru $x \in (n, n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $f'(x)=\pi n \sin 2\pi x$; se demonstrează că f este continuă în punctele $n \in \boldsymbol{Z}$, și derivata laterale sunt egale cu 0, așadar f este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

III.2.2. Arătați că funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, definită prin :

$$f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1+x}{1-x}, x \neq 1 \\ 0, \quad x=1 \end{cases}$$

este discontinuă în 1, derivabilă pe $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$ și că există $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$. Comentați!

III.2.3. Studiați derivabilitatea funcției: $f(x)=[x].cox^2 \pi x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

III.2.4. Fie $A \subseteq \boldsymbol{R}$, $x_0 \in \text{int}A$ și $f, g: A \to \boldsymbol{R}$ două funcții cu proprietățile:

1) g este mărginită într-o vecinătate a lui x_0;
2) $f(x)=(x-x_0)^2 g(x)$, $\forall x \in A$.

Arătați că f este derivabilă în x_0.

Folosind acest rezultat construiți o funcție $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivabilă numai într-un singur punct, e.g. $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Ind. Considerând g funcția lui Dirichlet, obținem f o funcție derivabilă numai în $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

III.2.5. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$; $f(x)=\begin{cases} |1-x^2|, & x \in Q \\ |1-x^4|, & x \in R \setminus Q \end{cases}$.

Ind. Se arată folosind problema III.1.4. că f este continuă doar în punctele $\{-1,0,1\}$. Arătam că f este derivabilă numai în $x=0$; considerăm $(r_n) \subset Q$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} r_n=0$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

şi $(x_n) \subset \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi evaluăm : $\lim_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(0)}{r_n} = -\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n^3 = 0$. Analog se studiază derivabilitatea în $\{-1,1\}$.

III.2.6. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcţii:

a) $f(x) = \frac{1}{x-a}, x \in \boldsymbol{R} \setminus \{a\}$; b) $f(x) = \ln(x-a), x > a$;

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}, x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-a, a\}$;

d) $f(x) = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}, x \in \boldsymbol{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Ind. a) Se demonstrează prin inducţie că $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$;

b) se observă că $f'(x) = \frac{1}{x-a}$ şi astfel $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$;

c) se descompune în fracţii simple şi

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right);$$

b) merită reţinut algoritmul de descompunere în fracţii simple în acest caz: considerăm :

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + ... + \frac{A_k}{x-a_k} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$$

şi pentru calculul lui A_k, înmulţim relaţia de mai sus cu $(x - a_k)$, adică :

$$\frac{1}{(x-a_1)...(x-a_{k-1})...(x-a_{k+1})...(x-a_n)} = +\left(\frac{A_1}{x-a_1} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}\right)(x-a_k) + A_k,$$

dând lui x valoarea a_k, obţinem : $A_k = \frac{1}{(a_k-a_1)...(a_k-a_{k-1})...(a_k-a_{k+1})...(a_k-a_n)}$;

calculul derivatei de ordin n nu mai prezintă dificultate după descompunerea în fracţii simple.

III.2.7. Se consideră f ; $\boldsymbol{R} \setminus \{1,2\} \to \boldsymbol{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$; calculaţi limita şirului cu termenul general $a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3)$.

Ind. Ţinând seama că $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{1}{(x-2)^{k+1}} - \frac{1}{(x-1)^{(k+1)}}\right]$,

avem $\frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3) = \left(-\frac{1}{n+2}\right)^{k+1} - \left(-\frac{1}{n+1}\right)^{k+1}$ şi astfel:

$$a_n = \frac{n^2}{(n+2)(n+3)}\left[1+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+2)^n}+(-1)^n\frac{n+3}{n+1}\frac{1}{(n+1)^n}\right],\ \text{deci}\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

III.2.8. Să se demonstreze că funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definită prin: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$ este indefinit derivabilă.

Ind. Se arată imediat că f este continuă și derivabilă în $x=0$, deci pe $\boldsymbol{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$$

Se demonstrează prin inducție după n că : $f^{(n)}(x)=\begin{cases} \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{\frac{-1}{x}}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$

unde P_{n-1} este un polinom de grad $n-1$ cu coeficienți reali.

III.2.9. Fie $P \in \boldsymbol{R}[X]$ un polinom; să se arate că nu există $a,b \in (-1,\infty)$ astfel încât: $P(x)=\ln(1+x), x\in(a,b)$

Ind. Presupunând că relația este adevărată, considerăm polinomul P de grad n și derivăm de $n+1$ ori obținând: $0=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \forall x\in(a,b)$, absurd!

Să reținem că putem înlocui ln cu sin, cos, exp.

III.2.10. Fie $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ o funcție de n ori derivabilă; dacă

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ astfel încât $f(x_k)=0,\ 1\le k\le n$,

atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f^{(n)}(c)=0$.

Ind. Aplicând teorema Rolle, rezultă că f' se anulează în cel puțin n puncte distincte $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$; aplicând din nou teorema Rolle obținem că f'' se anulează în cel puțin $n-1$ puncte distincte $c_i' \in (c_{i-1}, c_i)$, etc.

III.2.11. Fie f și g funcții derivabile pe $I \subset \boldsymbol{R}$; arătați că între două rădăcini ale lui f există o rădăcină a lui $f'+fg'$.

Ind. Considerăm funcția $h(x) = f(x).e^{g(x)}$, $x\in I$, funcție ce se anulează pentru rădăcinile lui f; aplicăm teorema Rolle , și astfel între două rădăcini ale lui h exista cel puțin un punct $\xi\in(a,b)$ astfel ca: $h'(\xi)=(f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)).e^{g(\xi)}=0$.

III.2.12. Fie $C_0+\frac{C_1}{2}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0$, $C_0,C_1,\ldots,C_n\in\boldsymbol{R}$; să se arate că ecuația : $C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$ are cel puțin o rădăcină reală între 0 și 1.

Ind. Observăm că $f(x) = C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n$ este derivata funcției $g(x) = C_0x+\frac{C_1x^2}{2}+\ldots+\frac{C_{n-1}x^n}{n}+\frac{C_nx^{n+1}}{n+1}$; se aplică teorema Rolle funcției g

Scanned with OKEN Scanner

$(g(0) - g(1) - C_0 + \frac{C_1}{2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0)$ deci există între 0 și 1 cel puțin o rădăcină a derivatei, $\xi \in (0,1)$: $g'(\xi) = f(\xi) = 0$.

III.2.13. Fie $f:[0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, continuă pe $[0, \infty)$, $f(0) = 0$, derivabilă pe $(0, \infty)$, și f' monoton crescătoare; arătați că funcția $g:(0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ este monoton crescătoare.

Ind. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe $[0, x]$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) \le f'(x),\ 0 \le \xi \le x;$$

evaluând: $g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \ge \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(x)}{x} \ge 0$, deci g este monoton crescătoare.

III.2.14. Să se arate că $e^x \ge x^e$, $\forall\, x \in (0,\infty)$ și e este singurul număr pozitiv cu această proprietate.

Ind. Considerăm $f:(0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; f este derivabilă, avem:

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $\forall\, x \in (0, \infty)$; astfel $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, e)$ și $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (e, \infty)$, deci e este punct de maxim global, unic determinat.

Atunci: $\frac{1}{e} = f(e) > f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, $\forall\, x \in (0, \infty) \setminus \{e\} \Leftrightarrow e^x \ge x^e$, $\forall\, x \in (0,\infty)$.

Fie $a \in (0, \infty)$ cu proprietatea $a^x \ge x^a$, $\forall\, x \in (0, \infty)$; atunci: $x \ln a \ge a \ln x$, $\forall\, x \in (0, \infty)$, deci $f(a) = \frac{1}{a}\ln a \ge \frac{1}{x}\ln x$, $\forall\, x \in (0, \infty)$; adică a este punct de maxim global, $a = e$.

În particular $e^\pi \ge \pi^e$.

III.2.15. Să se arate $\forall\, x \in (0,\infty)$ avem: $\ln(1+x) > \frac{arctgx}{1+x}, x > 0$.

Ind. Aplicăm teorema lui Cauchy funcțiilor $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ și $g(x) = arctgx$ pe $[0, x]$ ($x > 0$ arbitrar): $\exists\, c \in (0,x)$ astfel încât:

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{arctgx} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = (1+c^2)(1+\ln(1+c)) > 1,$$

rezultând: $\ln(1+x) > \frac{arctgx}{1+x}, x > 0$.

III.2.16. Să se demonstreze egalitățile:

a) $2arctgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi, & x \in (1,\infty) \\ -\pi, & x \in (-\infty,-1) \end{cases}$;

b) $arctgx + arctg\frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in (-1,\infty) \\ -\frac{3\pi}{4}, & x \in (-\infty,-1) \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Fie funcția $f(x) = 2arctgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, funcție definită pe $\boldsymbol{R}$, derivabilă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,1\}$: $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} + \frac{2}{1+x^2}$, deci $f'(x)=0$ pentru $|x|>1$.

Așadar $f(x) = \begin{cases} C_1, x \in (-\infty,-1) \\ C_2, \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$; constantele C_1, C_2 se determină dând lui x valori particulare în $(-\infty,-1)$, $(1, \infty)$: $C_2 = f(\sqrt{3}) = 2\,arctg\sqrt{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$ și $C_1 = f(-\sqrt{3}) = 2\,arctg(-\sqrt{3}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\pi$; în plus se observă că $f(1)=\pi$ și $f(-1)=-\pi$.

III.2.17. Să se demonstreze inegalitățile:

1) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^n+y^n}{2}$, $\forall\, x, y \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$;

2) $\ln\frac{x+y}{2} \le \frac{x}{x+y}\ln x + \frac{y}{x+y}\ln y$, $\forall\, x, y \in (0,\infty)$;

3) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i} \ge \frac{n^2}{n-1}$, unde $x_1, x_2, \ldots x_n \in (0,1)$ și $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Ind. 1) și 2) Se observă ca funcțiile $f(x) = x^n$, $x \in \boldsymbol{R}$ și $g(x) = x\ln x$, $x \in (0, \infty)$ sunt convexe ($f''(x) > 0, g''(x) > 0$) si se aplică inegalitatea *Jensen* (III.1.11):

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{x^n+y^n}{2},$$

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2} \le \frac{x}{2}\ln\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\ln\frac{y}{2};$$

3) considerăm funcția convexă $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$ și deci :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \text{ adică : } \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}.$$

III.2.18. $A_1, A_2, \ldots A_n$ fiind unghiurile unui poligon convex cu n laturi, să se demonstreze relația:

$$\sin A_1 + \sin A_2 + \ldots + \sin A_n \le n\sin\frac{2\pi}{n};$$

în particular, fiind date A, B, C unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, avem relația:

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ind. Se consideră funcția $f(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$, care este concavă și se aplică inegalitatea *Jensen*.

Scanned with OKEN Scanner

III.2.19. Fie $P_n \in \boldsymbol{R}[X]$ un polinom de grad n care are toate rădăcinile reale distincte; arătați că :

$$P_n(x).P_n''(x)-(P_n'(x))^2<0,\ \forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$$

unde $\{x_1,\dots,x_n\}$ sunt rădăcinile polinomului.

Ind. Calculăm $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}$, $\forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ și derivând obținem:

$$\left(\frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\right)'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)^2}<0,\ \forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\},$$

adică $P_n(x).P_n''(x)-(P_n'(x))^2<0,\ \forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$.

III.2.20. Fie $P_n \in \boldsymbol{R}[X]$ un polinom de grad n care are toate rădăcinile reale, distincte, strict pozitive; arătați că :

$$xP_n(x).P_n''(x)<P_n'(x)(xP_n'(x)-P_n(x)),\ \forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$$

Ind. Rezolvare analogă cu III.3.11. prin derivarea egalității:

$$\frac{xP_n'(x)}{P_n(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{x-x_i},\ \forall\, x\in \boldsymbol{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\}.$$

III.2.21. Fie $x_1,\dots,x_{n-1}$ rădăcinile diferite de 1 ale ecuației $x^n-1=0$; să se calculeze $\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{1-x_k}$.

Ind. $x_1,\dots,x_{n-1}$ sunt rădăcinile ecuației $P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1=0$; calculăm ca în problema III.2.19 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}=\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}=\dfrac{(n-1)x^{n-2}+(n-3)x^{n-3}+\dots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1}$,

și apoi dăm lui x valoarea 1.

III.2.21. Să se scrie formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcția:

$$f(x)=\sqrt{1+x},\ x>-1.$$

Ind. Ținând seama că : $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ avem:

$$f(x)=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1.3.5\dots(2k-3)}{k!\,2^k}x^k+(-1)^n.\frac{(2n-1)!!x^{n+1}}{(n+1)!.2^{n+1}}(1+\xi)^{n+1},\ x\in(-r,\ r),$$

ξ între 0 și x

III.2.22. Scrieți formula Taylor de ordinul n pentru funcțiile:

a) $f(x)=\ln x,\ x>0$, în punctul $a=1$;

b) $f(x)=e^x, x\in \boldsymbol{R}$, în punctul $a=-1$.

R. a) $f(x)=x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{(x-1)^k}{k}.+\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}.(-1)^n.\dfrac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$, $x\in(1-r,\ 1+r)$,

ξ între 1 și x;

a) $f(x)=\dfrac{1}{e}(1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(x+1)^k}{k!}.)+\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}.e^{\xi}$, $x\in(-1-r,-1+r)$, ξ între -1 și x.

Scanned with OKEN Scanner

III.2.23. Evaluați eroarea comisă în formula: $e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$

Ind. Scriem polinomul Taylor de ordin 4 asociat funcției $f(x)=e^x$, în punctul $a=0$, polinom ce aproximează funcția într-o vecinătate a lui 0; având

$$e = f(1) \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

notând eroarea comisă er avem: $er \le |R_5(x)| = |\frac{x^5}{5!}e^{\xi}|$, ξ între 0 și x, deci: $er \le \frac{e}{5!}$

III.2.24. Să se calculeze cu ajutorul formulei Taylor, următoarele limite:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Ind. Scriem formula Mac-Laurin de grad 4 (egal cu gradul numitorului) pentru funcțiile $f(x)=\cos x$, $g(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ și astfel avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}\sin\theta.x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}g^{(5)}(\theta_1 x)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}[\frac{1}{4!}-\frac{3}{4!}+\frac{x^5}{5!}(-\sin\theta.x+g^{(5)}(\theta_1 x))] = \frac{-1}{12}.$$

III.2.25. Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x)=2\cos x+x^2, x\in \boldsymbol{R}$$

folosind propozitia III.2.5.

Ind. $f'(x)=-2\sin x+2x$, $f'(0)=0$; $f''(x)=-2\cos x+2$, $f''(0)=0$; $f'''(x)=2\sin x, f'''(0)=0$; $f^{(4)}(x)=2\cos x, f^{(4)}(0)=2$, așadar în $x=0$ funcția are un minim.

III.2.26. Să se arate că funcția $f: \boldsymbol{R}\to(-1,\infty)$, $f(x)=4^x+2^x-1$ este bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(1)$ și $(f^{-1})''(1)$.

Ind. $f'(x)>0$, $\forall x\in \boldsymbol{R}$ implică f strict crescătoare, deci injectivă și în plus $f(\boldsymbol{R})=(-1,\infty)$; conform propopziției III.2.6. avem: $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}$, formula ce se poate deduce astfel: derivăm relația $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, obținând:

$$(f^{-1})'(f(x)).f'(x)=1 \qquad (1)$$

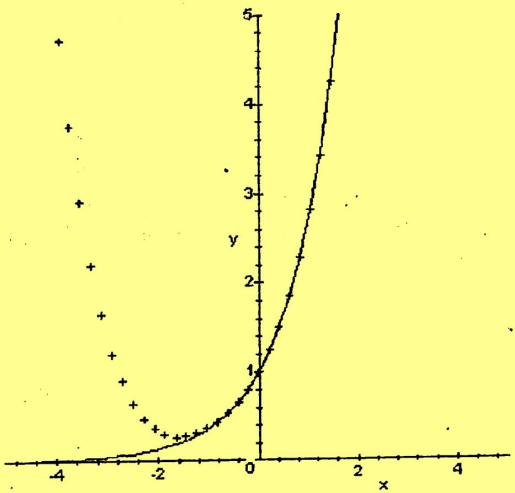
notând $y=f(x)$, avem: $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$; pentru a calcula derivata de ordinul 2 a funcției inverse, derivăm relația (1): $(f^{-1})''(f(x)).(f'(x))^2+(f^{-1})'(f(x))f''(x)=0$, rezultând astfel: $(f^{-1})''(y)=\frac{-(f^{-1})'(y).f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$, formulă ce o aplicăm în cazul acestei probleme.

Scanned with OKEN Scanner

III.2.27. Desenați cu ajutorul programului MapleV. în același sistem de axe, perechile următoare de funcții și comentați rezultatele:

1) $f,g: [-5,5] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$;

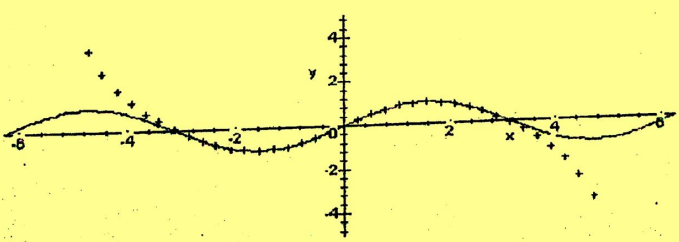
```
>plot({exp(x),1+x+(x^2)/2+(x^3)/6+(x^4)/24},x=5..5,y=0..5,style=[point,pat
ch]);
```



Intr-o vecinătate a originii, cele două grafice coincid, lucru ce era de așteptat, deoarece a doua funcție este polinomul Taylor de ordinul IV al exponențialei în $a=0$; (în program folosindu-se, de fapt dezvoltările în serie a funcțiilor). Pentru a face distincția dintre cele două grafice (în alb-negru) am impus opțiunea style

2) $f,g: [-2\pi, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

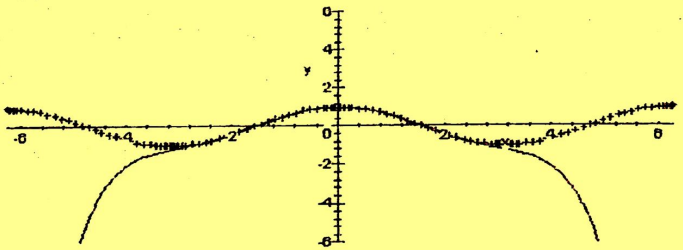
```
>plot({sin(x),x-(x^3)/6+(x^5)/120-(x^7)/5040},x=-2*Pi..2*Pi,y=1..1,style =
[point,patch]);
```



Scanned with OKEN Scanner

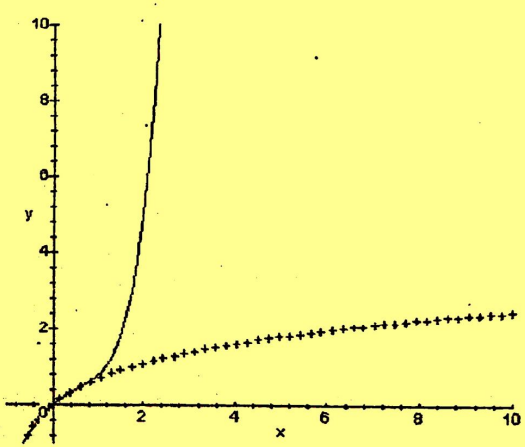
3) $f,g\colon [-2\pi, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$;

```
> plot({cos(x), 1-(x^2)/2+(x^4)/24-(x^6)/720},x=-2*Pi..2*Pi,y=-1..1,
style=[point,patch]);
```



4) $f,g\colon (-1,10] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$.

```
>plot({ln(1+x),x-(x^2)/2+(x^3)/3-(x^4)/4+(x^5)/5},x=-1..10,y=-1..10,
style=[point,patch]);
```



III.2.27. Transformați expresia $y'y''' - 3y''^2$ alegând y ca nouă variabilă independentă.

Ind. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}$ și $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}\right) =$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{d}{dy}\left(-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}\right) \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{3(x'(y))^2(x''(y))^2 - x'''(y)(x'(y))^3}{(x'(y))^7} = \frac{3(x''(y))^2 - x'''(y)\cdot x'(y)}{(x'(y))^5};$$

înlocuind expresia devine $-\frac{x'''}{x'^5}$.

III.2.28 Transformați expresia $\frac{y''}{y'^3} + y$ schimbând rolul variabilelor.

R. $y - x''$.

III.2.29 Transformați ecuația $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$, luând y ca variabilă, și rezolvați apoi ecuația.

R. $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$, rezultând $y(x) = \frac{x - C_1}{C}$

III.2.30 Transformați expresia $x^2y'' + 2x^2y' + y$, știind că $x = \frac{1}{t}$.

Ind. $y' = \frac{dy}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{2}{t^3}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(-\frac{1}{t^2}\right)^3} = -t^4\frac{d^2y}{dt^2} - 2t^3\frac{dy}{dt}$.

III.2.31 Transformați expresia $W = (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$, considerând $x = \sin t$.

R. $W = \frac{d^2y}{dt^2}$

III.2.32 Ce devine ecuația $4x^2y'' + 4xy' - (4x^2 + 1)y = 4x\sqrt{x}e^x$, $x > 0$, dacă se face schimbarea de funcție $u = \sqrt{x}.y$?

Ind. avem $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}y + \sqrt{x}\frac{dy}{dx}$, de unde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}y(x)$ și $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2x^2}y(x) - \frac{1}{2x}y'(x)$; atunci ecuația devine $u'' - u = e^x$.

Scanned with OKEN Scanner

III.2.33 Să se calculeze $W = \dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$ dacă se face schimbarea $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r = r(t)$.

Ind. Avem $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{r'\sin t + r\cos t}{r'\cos t - r\sin t}$ şi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r'\sin t + r\cos t}{r'\cos t - r\sin t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{(r''\sin t + 2r'\cos t - r\sin t)(r'\cos t - r\sin t)}{(r'\cos t - r\sin t)^3} -$$

$$- \frac{(r''\cos t - 2r'\sin t - r\sin t)(r'\sin t + r\cos t)}{(r'\cos t - r\sin t)^3};$$

înlocuind, obţinem $W = \dfrac{(r'\cos t - r\sin t)(r^2 - rr'' + 2r'^2)}{r'^2 + r^2}$.

III.2.34 Să se calculeze expresia $K = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ (curbura unei curbe) în coordonate polare, considerând $r = r(t)$.

R. $K = \dfrac{r^2 + 2(\dfrac{dr}{dt})^2 - r\dfrac{d^2r}{dt^2}}{(r^2 + (\dfrac{dr}{dt})^2)^{3/2}}$

Scanned with OKEN Scanner

III.3. *Integrala Riemann*

III.3.1. Calculaţi integrala $I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)dx$ (*Poisson*), pentru $|r| \neq 1$ cu ajutorul sumelor integrale.

Ind. $1-2r\cos x+r^2 \geq (1-|r|)^2 > 0$, $\forall\ x \in [0,\pi]$, $\forall\ r \in R \setminus \{-1,1\}$, şi astfel deducem din continuitatea funcţiei că integrala există. Vom aplica teorema III.3.1:

Fie $\Delta_n = \{\frac{k\pi}{n}, k = \overline{0,n}\}$ şi $\xi_{\Delta_n} = \{\frac{k\pi}{n}, k = \overline{0,n}\}$;

evaluăm $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})$ ţinând seama de identitatea:

$$z^{2n}-1 = (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(1-2z\cos\frac{k\pi}{n}+z^2)$$

(obţinută pe baza expresiei celor $2n$ rădăcini ale ecuaţiei $z^{2n}-1=0$):

$$\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1-2r\cos\frac{k\pi}{n}+r^2) = \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}(1-2r\cos\frac{k\pi}{n}+r^2) =$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}.$$

Dacă $|r|<1$, avem $\lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$ şi astfel

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{r^{2n}-1}{r^2-1} = 0;$$

dacă $|r|>1$ avem $I(\frac{1}{r}) = 0$, de unde rezultă $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx = 2\pi\ln|r|$.

III.1.2. Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;$$

în particular dacă $a=0$, $b=1$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ind. Se foloseşte teorema III.3.1, considerând diviziunea echidistantă:

$\Delta_n = \{a+\frac{k\pi}{n}(b-a), k = \overline{0,n}\}$ şi familia $\xi_{\Delta_n} = \{a+\frac{k\pi}{n}(b-a), k = \overline{0,n}\}$.

III.3.3. Calculaţi limitele următoare, folosind integrala Riemann:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1+n}}+\frac{1}{\sqrt{2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}})$; 2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{4n^2-k^2}}$;

Scanned with OKEN Scanner

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ind. Se foloseşte problema precedentă şi astfel

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+n}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}+1}}=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}=2(\sqrt{2}-1)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{\sqrt{4n^2-k^2}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}}=2\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p=\int\limits_0^1 x^p dx=\dfrac{1}{p+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}==e^{\int\limits_0^1\ln(1+x)dx}=\dfrac{4}{e}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)}=e^{\int\limits_0^1\ln x dx}=\dfrac{1}{e}$.

III.3.4. Fie $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ o functie continuă şi $\varphi:[\alpha,\beta]\to R$ o funcţie convexă, continuă; atunci: $\varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b(\varphi\circ f)(x)dx$ (*inegalitatea Jensen*).

Ind. Conform problemei III.3.2, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi\circ f)(x)dx.$$

Pe de altă parte din convexitatea lui φ, rezultă (propoziţia III.1.11.):

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Prin trecere la limită, obţinem inegalitatea cerută.

Este evident că un rezultat analog are loc în cazul φ funcţie concavă.

III.3.5. Fie I un interval şi $f:I\to(0,\infty)$ o funcţie continuă; atunci $\forall\, a,b\in I$, $a<b$ avem:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx\le\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\quad\text{şi}\quad\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge\frac{(b-a)^2}{\int\limits_a^b f(x)dx}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Aplicații imediate ale inegalității Jensen (în primul caz $\varphi(x)=\ln x$, în al doilea $\varphi(x)=\frac{1}{x}$).

III.3.6. Arătați că următoarele funcții sunt integrabile pe mulțimile indicate:

1) $F:[0,1]\to R$, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, x=\frac{p}{q}\in Q, p,q\in N^*, (p,q)=1\\ 0, \quad x\in((0,1]\setminus Q)\cup\{0\}\end{cases}$

(*funcția lui Riemann*);

2) $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], x\in(0,1].\\ 0, x=0\end{cases}$

Ind. Se aplică teorema lui Lebesgue:

1) funcția lui Riemann este mărginită și discontinuă pe mulțimea numerelor raționale din [0,1] (vezi problema III.1.6)

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, & x\in(\frac{1}{2},1]\\ \frac{1}{x}-2, & x\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{x}-n, x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$

se observă că f este mărginită și este discontinuă în $x=\frac{1}{n}$, $n\in N^*$

In ambele cazuri sunt îndeplinite condițiile teoremei Lebesgue, mulțimile numărabile fiind neglijabile.

III.3.7. Să se calculeze următoarele integrale: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ și $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$.

Aplicați rezultatul obținut în calculul integralei $\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

Ind. Aplicând integrarea prin părți, notând $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$, obținem relația de recurență: $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; cum $I_0=\frac{\pi}{2}$ și $I_1=1$, deducem:

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)!}{(2k)!}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ și } I_{2k+1}=\frac{(2k)!}{(2k+1)!}.$$

Prin schimbarea de variabilă $x=\frac{\pi}{2}-t$, obținem: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Se arată uşor că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, unde f este funcţie integrabilă (se face substituţia $x = \frac{\pi}{2} - t$).

In integrala $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ facem substituţia $x = \cos t$ şi obţinem:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!}{(2n+1)!}.$$

III.3.8. Să se calculeze următoarele integrale:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)dx$; 2) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$; 3) $\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}tgx)dx$; 5) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$);

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$;

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$.

Ind. 1)- 4) se foloseşte substituţia $x = \frac{\pi}{4} - t$, respectiv $x = \frac{\pi}{3} - t$;
2) – 3)cu substituţia $x = tgt$, respectiv $x = atgt$ obţinem prima integrală;
5) substituţia $x = \pi - t$; 6)-7) , 8)-9) şi 10)-11) se adună cele două integrale, se face calculul şi apoi făcând substituţia $x = \frac{\pi}{2} - t$ obţinem egalitatea lor.

III.3.9. Să se calculeze:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; 3) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

Ind. Merită reţinut că în cazul aflării unei primitive de forma

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Scanned with OKEN Scanner

este preferabilă substituția $\frac{1}{mx+n}=t$, care simplifică mult calculul.

III.3.10 Calculați $\int_1^e \frac{dx}{x.(x+1).(x+2)...(x+n)}$

Ind. Se folosește algoritmul de descompunere în fracții simple prezentat în problema III.2.6.

III.3.11. Să se calculeze :

1) $\int_1^7 \sqrt{(x-1)(7-x)}dx$; 2) $\int_1^5 \sqrt{-x^2+6x-5}dx$.

Ind. Merită reținut că în cazul calculului unei integrale de forma $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ este preferabilă substituția $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$.

III.3.12. Se consideră integrala $I_n=\int_0^1 x^n \sin \pi x dx$; să se stabilească o relație de recurență pentru calculul lui I_n. Să se arate că șirul $(I_n)_n$ este descrescător și are limita zero.

Ind. Integrând prin părți obținem: $I_n=\frac{1}{\pi}-\frac{n(n-1)}{\pi^2}I_{n-2}$.

Pentru $x\in[0,1]$ avem $x^{n+1}\sin \pi x \le x^n \sin \pi x$, așadar $I_{n+1}\le I_n$; în plus:

$$0\le I_n \le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}.$$

III.3.13. Fără a calcula integralele sa se arate care dintre următoarele integrale are valoarea mai mare:

1) $\int_1^2 \ln x dx$ sau $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$; 2) $\int_3^4 \ln x dx$ sau $\int_3^4 (\ln x)^2 dx$;

3) $\int_1^2 \ln(1+x)dx$ sau $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$; 4) $\int_2^{10} x arctgx dx$ sau $\int_2^{10} \ln(1+x^2)dx$.

Ind. 1) Când $x\in(1,2)$ $\ln x\in(0,1)$, așadar $(\ln x)^2<\ln x$ și astfel:

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx < \int_1^2 \ln x dx ;$$

2) când $x\in(2,4)$ $\ln x>1$, așadar $(\ln x)^2>\ln x$;

3) se demonstrează că $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$, pentru $x>0$, folosind monotonia funcției

$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$;

Scanned with OKEN Scanner

4) se arată că $x\,arctgx > \frac{x}{1+x}$, pentru $x > 0$.

III.3.14. Fără a calcula integralele să se demonstreze următoarele inegalităţi:

1) $1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$; 2) $0 \le \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x.\ln(1-x^2)dx \le \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$;

3) $\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le \frac{\pi}{4}$; 4) $2\sqrt{e} \le \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_0^1 e^{1-x^2}dx \le 1+e$.

Ind. 1) Funcţia $f(x) = e^{x^2}$ este strict crescătoare, deducem că pentru $x \in [0,1]$ avem $1 \le e^{x^2} \le e$;

2) funcţia $f(x) = x\ln(1-x^2)$ este strict descrescătoare pe (-1,0) şi astfel $f(0) \le x\ln(1-x^2) \le f(-1/2)$;

3) se foloseşte inegalitatea : $e^x \ge 1+x, x \in \boldsymbol{R}$, din care rezultă că : $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$;

4) se studiază monotonia funcţiei $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$ şi din tabloul de variaţie rezultă că $2\sqrt{e} \le e^{x^2} + e^{1-x^2} \le 1+e$.

III.3.15. Calculaţi derivatele următoarelor funcţii:

1) $F(x) = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}dt$ în $x = 1$; 2) $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}dt$;

3) $F(x) = \int_0^{\sin x} \arcsin t\,dt$.

Ind. Folosim propoziţia III.3.7;

1) $F'(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ şi $F'(1) = \frac{1}{3}$;

2) fie $G(x)$ o primitivă a funcţiei e^{x^2}; conform formulei Leibniz – Newton avem: $F(x) = G(x^2) - G(0)$ şi astfel $F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xe^{x^4}$.

III.3.16. Dacă $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ este o funcţie integrabilă; atunci funcţia $F: [a,b] \to \boldsymbol{R}$, definită de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este lipschitziană.

Ind. f fiind integrabilă este mărginită, deci $\exists M > 0$ astfel încât $\forall\, x \in [a,b]$ $|f(x)| < M$ aşadar $|F(x) - F(y)| = |\int_x^y f(t)dt| < M\,|x-y|$; dacă s-ar fi pus problema uniform continuităţii, nu era nevoie de demonstraţie: conform rezultatului din III.3. F este continuă pe $[a,b]$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

In continuare, prezentăm câteva programe pentru calculul integralelor prin metoda dreptunghiurilor, trapezelor, respectiv metoda Simpson. In cazul primelor două metode, impunem o anumită croare, obținând astfel numărul necesar de elemente ale diviziunii, apoi se calculează efectiv valoarea integralei; am ales aceleași integrale, pentru a ne da seama și intuitiv care metodă este mai eficientă. Pentru metoda Simpson, programul calculează efectiv integrala pentru numărul de diviziuni ales de noi și apoi face evaluarea erorii:

```
program metoda_dreptunghiului;
uses crt;
var x,eps,s,l:real;
   ind,n,k,sup,a,b:integer;
   ok:boolean;
   c:char;
   diviziuni:array[0..1000] of real;
function putere(a,m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
         put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function factorial(m:integer):real;
      var i:integer;
         p:real;
      begin
      p:=1;
      for i:=1 to m do
         p:=p*i;
      factorial:=p;
      end;
function integrala(m:real):real;
      begin
      integrala:=(m+1)*(m+1);   {exp(-m);}   {m+1)*(m+1)*(m+1)*(m+1)}
      end;

begin {pp}
clrscr;
sup:=4;     {sup:=1;}   {sup:=16;}
writeln('Dati limitele de integrare:');
write('a=');read(a);
write('b=');read(b);

repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
```

```
        begin
        write('Dati eroarea:');read(eps);
        ind:=1;
        ok:=true;
        while ok do
            begin
            if abs(sup*(b-a)*(b-a)/ind-eps)<=0 then
              begin
              writeln('Numarul punctelor diviziunii este ',ind,'.');
              ok:=false;
              end;
            ind:=ind+1;
            end;
        ind:=ind-1;
        for k:=0 to ind do
           diviziuni[k]:=a+(b-a)*k/ind;
        s:=0;
        for k:=0 to ind do
           s:=s+integrala(diviziuni[k]);
        I:=((b-a)/ind)*s;
        writeln('Integrala este ',I:6:4,'.');
        end;
until c='n';

readln;
end.
```

1). $\int_0^1 (x+1)^2\,dx = 2.33333$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=1
Mai doriţi?
Dati eroarea:0.1
Numarul punctelor diviziunii este 40.
Integrala este 2.3959.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Numarul punctelor diviziunii este 400.
Integrala este 2.3396.

2). $\int_0^3 e^{-x}\,dx = 0.95021$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=3
Mai doriti?
Dati eroarea:0.1

Scanned with OKEN Scanner

Numarul punctelor diviziunii este 90.
Integrala este 0.9678.

Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Numarul punctelor diviziunii este 900.
Integrala este 0.9520.

3). $\int_0^1 (x+1)^4\,dx = 6.2$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=1
Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
Numarul punctelor diviziunii este 160.
Integrala este 6.2532.

```
program'metoda_trapezelor;
uses crt;
var x,eps,s,I:real;
   ind,n,k,sup,a,b:integer;
   ok:boolean;
   c:char;
   diviziuni:array[0..1000] of real;
function putere(a,m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
         put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function factorial(m:integer):real;
      var i:integer;
         p:real;
      begin
      p:=1;
      for i:=1 to m do
         p:=p*i;
      factorial:=p;
      end;
function integrala(m:real):real;
      begin
      integrala:=exp(-m){(m+1)*(m+1)*(m+1)*(m+1)};
      end;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
begin {pp}
clrscr;
sup:=1;        {32}
writeln('Dati limitele de integrare:');
write('a=');read(a);
write('b=');read(b);

repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
      begin
      write('Dati croarca:');read(eps);
      ind:=1;
      ok:=true;
      while ok do
          begin
          if sup*(b-a)*(b-a)*(b-a)/(12*ind*ind)-eps<=0 then
            begin
            writeln('Numarul punctelor diviziunii este ',ind,'.');
            ok:=false;
            end;
          ind:=ind+1;
          end;
      ind:=ind-1;
      for k:=0 to ind do
         diviziuni[k]:=a+(b-a)*k/ind;
      s:=0;
      for k:=1 to ind-1 do
         s:=s+2*integrala(diviziuni[k]);
      s:=s+integrala(a)+integrala(b);
      I:=((b-a)/(2*ind))*s;
      writeln('Integrala este ',I:6:4,'.');
      end;
until c='n';

readln;
end.
```

1). $\int_0^1 (x+1)^4\,dx = 6.2$

```
Dati limitele de integrare:
a=0
b=1
Mai doriti?
Dati croarea:0.1
Numarul punctelor diviziunii este 6.
```


Scanned with OKEN Scanner

Integrala este 6.2648.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Numarul punctelor diviziunii este 17.
Integrala este 6.2081.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.001
Numarul punctelor diviziunii este 52.
Integrala este 6.2009.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.0001
Numarul punctelor diviziunii este 53.
Integrala este 6.2008.

2). $\int_0^3 e^{-x}dx = 0.95021$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=3
Mai doriti?
Dati eroarea:0.1
Numarul punctelor diviziunii este 5.
Integrala este 0.9785.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.01
Numarul punctelor diviziunii este 15.
Integrala este 0.9534.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.001
Numarul punctelor diviziunii este 48.
Integrala este 0.9505.
Mai doriti?
Dati eroarea:0.0001
Numarul punctelor diviziunii este 53.
Integrala este 0.9505.
Mai doriti?

```
program Simpson;
uses crt;
var x,eps,s1,s2,I,sup,test:real;
   ind,n,k,a,b:integer;
   ok:boolean;
   c:char;
   diviziuni:array[0..10000] of real;
function putere(a,m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
        begin
        put:=1;
        for i:=1 to m do
          put:=put*a;
        puterc:=put;
        end;
function factorial(m:integer):real;
        var i:integer;
          p:real;
        begin
        p:=1;
        for i:=1 to m do
          p:=p*i;
        factorial:=p;
        end;
function integrala(m:real):real;
        begin
        integrala:=ln(1+m);    {sqrt(m);}
        end;

begin {pp}
clrscr;
writeln('Dati limitele de integrare:');
write('a=');read(a);
write('b=');read(b);
repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
      begin
      writeln('Dati numarul de diviziuni:');read(ind);
      for k:=0 to ind do
        diviziuni[k]:=a+(b-a)*k/ind;
      s1:=integrala(a)+integrala(b);
      s2:=0;
      for k:=0 to ind do
        if k mod 2=0 then
          begin
          if (k<>a) and (k<>b) then
            s1:=s1+2*integrala(diviziuni[k]);
          end
        else
          begin
          if (k<>a) and (k<>b) then
            s2:=s2+4*integrala(diviziuni[k]);
          end;
      I:=1/3*(b-a)/ind*(s1+s2);
      writeln('Integrala este ',I:6:4,'.');
      end;
until c='n';
```


Scanned with OKEN Scanner

```
readln;
end.
```

1). $\int_0^1 \ln(x+1)dx = 0.3862$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=1
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
100
Integrala este 0.3908.
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
1000
Integrala este 0.3868.
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
10000
Integrala este 0.3863.

2). $\int_0^1 \sqrt{x}dx = 0.6666$

Dati limitele de integrare:
a=0
b=1
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
100
Integrala este 0.6719.
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
1000
Integrala este 0.6673.
Mai doriti?
Dati numarul de diviziuni:
10000
Integrala este 0.6667.

Scanned with OKEN Scanner

III.4. *Siruri şi serii de funcţii.*

III.4.1. Se dă şirul de funcţii $f_n(x) = 1 + x^{2n}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$; se cere:

a) mulţimea de convergenţă şi funcţia limită;

b) să se arate că nu este uniform convergent pe (-1,1) şi să se determine o mulţime de convergenţă uniformă.

Ind. a se vedea exemplul din paragraful III.4; mulţimea de convergenţă uniformă este $(-\alpha, a) \subset (-1,1)$.

III.4.2. Să se arate că şirurile de funcţii :

$f_n(x) = \sin^n x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $n \in N$ şi $g_n(x) = \cos^n x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $n \in N$ sunt convergente pe domeniul de definiţie; să se determine funcţia limită şi să se arate că şirurile nu sunt uniform convergente pe $(0, \frac{\pi}{2})$, stabilindu-se mulţimile de convergenţă uniformă.

III.4.3. Se consideră şirul $(f_n)_n$ definite pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ prin relaţia de recurenţă: $f_1(x) = x$, $f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x))$; să se arate că şirul converge uniform la funcţia identic nulă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ind. Fie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; şirul $(f_n(x))_n$ este descrescător deoarece :

$$f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x)) < f_{n-1}(x);$$

în plus $0 \le f_n(x)$, deci şirul convergent (cum x a fost arbitrar ales rezultă convergenţa punctuală a şirului $(f_n)_n$.). Trecând la limită în relaţia de recurenţă, rezultă că limita acestui şir este soluţia ecuaţiei $f(x) = \sin f(x)$, ecuaţie ce este verificată numai de funcţia $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Pentru a arăta uniform convergenţa şirului, este suficient să arătăm că şirul numeric $a_n = \sup_{[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)|$ este convergent la zero. Observăm că funcţia f_n este strict crescătoare, lucru ce îl vom verifica prin inducţie: $f_1(x) = x$ este crescătoare; presupunem că f_{n-1} este crescătoare şi arătăm că f_n este crescătoare:

Fie $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $f_n(x_1) = \sin(f_{n-1}(x_1)) \le \sin(f_{n-1}(x_2)) = f_n(x_2)$,

proprietate din care rezultă că $\sup_{[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Am demonstrat că $(f_n(x))_n$ converge la funcţia identic nulă, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, deci pentru $x = \frac{\pi}{2}$ avem $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem astfel:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0 \text{ avem } |f_n(x)| < f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < \varepsilon, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

III.4.4. Se poate aplica teorema de transfer de derivabilitate (III.4.4.) şirului de funcţii $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ pe [-1,1] ?

Ind. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$, $\forall\ x \in [-1,1]$; şirul derivatelor este $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $\forall\ x \in [-1,1]$ şi $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, x \in [-1,1] \setminus \{0\} \end{cases}$; derivatele sunt funcţii continue pe [-1,1], dar funcţia limită nu este, deci şirul derivatelor nu converge uniform şi astfel nu se poate aplica teorema III.4.4.

III.4.5. Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de funcţii:

1) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \neq \frac{1}{2}$; 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}, x \in \boldsymbol{R}$;

3) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$; 4) $\sum_{n\geq 1} (2-x)(2-\sqrt{x})...(2-\sqrt[n]{x}), x > 0.$

Ind. 1) Aplicăm criteriul rădăcinii (propoziţia II.3.7.) şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|.$$

Seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1$, adică $x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, \infty)$.;

pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| > 1$ seria este divergentă (corolar 1, propoziţia II.3.7);

pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = 1$ ($x \in \{0, 2/3\}$) seria este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = e \neq 0$ şi $\lim_{n\to\infty} |f_n(-1)| = e \neq 0$.

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\sin x|$, aşadar seria este absolut convergentă pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; pentru $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ avem seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ serie convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă în rest; pentru $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ avem seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ serie convergentă pentru $\alpha > 0$ conform criteriului lui Leibnitz (propoziţia II.3.10).

Scanned with OKEN Scanner

3)Aplicăm criteriul raportului (propozitia II.3.6) şi astfel: $\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\frac{|1-x^2|}{1+x^2}$

Seria este absolut convergentă pentru $\frac{|1-x^2|}{1+x^2}>1$ adică $x\neq 0$; pentru $x=0$ obţinem seria $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, serie alternată ce este convergentă (propoziţia II.3.10).

4) Din $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$ deducem că de la un anumit rang n_0,; termenii seriei vor avea acelaşi semn ($\forall\ n\geq n_0\ \ 2-\sqrt[n]{x}>0$); eliminând primii n_0 termeni şi înmulţind eventual toţi termenii rămaşi cu -1 obţinem o serie cu termeni pozitivi. Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1$, aplicăm criteriul Raabe- Duhamel (propoziţia II.3.8):

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}=\ln x$$

Astfel pentru $x > e$ seria este convergentă, pentru $x < e$ seria este divergentă; pentru $x = e$ seria este divergentă (a se vedea problema II.3.4.b).

Merită observat că pentru $x = 2$ toţi termenii seriei sunt zero, deci seria este convergentă.

III.4.6. Să se studieze caracterul convergenţei următoarelor serii de funcţii pe mulţimile indicate:

1) $x+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right), x\in[0,1]$; 2) $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right), x\in\boldsymbol{R}$;

3) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^2+n}}, x\in\boldsymbol{R}$;

4) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x\in[\alpha,2\pi-\alpha], \alpha>0$;

5) $\sum_{n\geq 1}arctg\frac{2x}{x^2+n^4}, x\in\boldsymbol{R}$;

6) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4}$

Ind. 1) Avem $s_n=\frac{x}{1+nx}$, deci $\lim_{n\to\infty}s_n=0$, $\forall\ x\in[0,1]$, adică funcţia limită este funcţia identic nulă pe $[0,1]$, $\alpha_n(x)\equiv 0$

Deoarece $|s_n(x)-0|<\frac{1}{n}$, $\forall\ x\in[0,1]$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ şirul $(s_n)_n$ converge uniform pe $[0,1]$ la funcţia identic nulă

2) Aplicăm corolarul propoziţiei III.4.7; fie $x\in\boldsymbol{R}$; şirul $(\alpha_n(x))_n$, $\alpha_n(x)=\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right)$, este un şir descrescător de numere pozitive; pe de altă parte : $0<\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right)\leq\frac{1}{n}$

Scanned with OKEN Scanner

şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ implică convergenţa uniformă a şirului la funcţia identic nulă pe $\boldsymbol{R}$.

3) aplicăm criteriul Abel (propoziţia III.4.7) $f_n(x)=\cos\frac{2n\pi}{3}$, $x\in\boldsymbol{R}$;

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|=|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{3}|=|\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}|\le\frac{2}{\sqrt{3}},\ \forall x\in\boldsymbol{R}$$

$\alpha_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+n}}$ $n\in\boldsymbol{N}$, $\forall x\in\boldsymbol{R}$ şirul $(\alpha_n(x))_n$ este descrescător, iar şirul de funcţii $(\alpha_n)_n$ converge uniform pe A la funcţia identic nulă, deoarece $|\alpha_n(x)-0|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall x\in\boldsymbol{R}$

Aşadar seria de funcţii $\sum_{n\ge0}\alpha_n f_n$ este uniform convergentă.

4) aplicăm criteriul Abel (propoziţia III.4.7)

$$f_n(x)=\sin nx,\ |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \forall\ x\in[\alpha,2\pi-\alpha],\alpha>0;\ \alpha_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

5) Vom aplica criteriul Weierstrass (propoziţia III.4.6); cu ajutorul derivatei se arată că $|arctg\frac{2x}{x^2+n^4}|\le arctg\frac{1}{n^2}$; seria $\sum_{n\ge1} arctg\frac{1}{n^2}$ este convergentă deoarece $arctg\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ şi seria $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$ este convergentă; aşadar seria este absolut şi uniform convergentă.

2) aplicăm criteriul Weierstrass: $\left|\frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

III.4.7. Se dă seria de funcţii $\sum_{n\ge1}\frac{\sin nx}{(2n)^4}$, $x\in\boldsymbol{R}$; să se arate că este absolut şi uniform convergentă pe $\boldsymbol{R}$; studiaţi aceeaşi problemă pentru seria derivatelor până la ordinul trei inclusiv.

Ind. $\left|\frac{\sin nx}{(2n)^4}\right|\le\frac{1}{(2n)^4}$, deci seria este absolut şi uniform convergentă; cum termenii seriei sunt funcţii continue pe $\boldsymbol{R}$, suma seriei $S(x)$ este funcţie continuă pe $\boldsymbol{R}$.

Seria derivatelor este $\sum_{n\ge1}\frac{\cos nx}{2^4n^3}$; din $\left|\frac{\cos nx}{2^4n^3}\right|\le\frac{1}{2^4n^3}$ rezultă că seria derivatelor este absolut şi uniform convergentă. pe $\boldsymbol{R}$

Scanned with OKEN Scanner

Seria derivatelor de ordinul doi este $\sum_{n\geq 1}\frac{-\sin nx}{2^4 n^2}$ şi avem : $\left|\frac{-\sin nx}{2^4 n^2}\right| \leq \frac{1}{2^4 n^2}$, aşadar şi această seria este absolut şi uniform convergentă pe $\boldsymbol{R}$.

Seria derivatelor de ordinul trei este $\sum_{n\geq 1}\frac{-\cos nx}{2^4 n}$; folosim criteriul Abel :

$|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |\frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}|$; sumele parţiale sunt mărginite pentru $\frac{x}{2}\neq k\pi$ iar $\alpha_n(x)=\frac{1}{n}$. In concluzie seria derivatelor de ordin trei este uniform convergentă pe $\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi\}$.(nu se poate afirma nimic despre absolut convergenţă)

III.4.8. Se dă seria de funcţii $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}} tg^n x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; să se stabilească mulţimea de convergenţă; aceeaşi problemă pentru seria derivatelor.

Ind. Aplicăm criteriul raportului(propoziţia II.3.6.) :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}{3^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n^2+2n+2}}|tgx| = \frac{|tgx|}{\sqrt{3}};$$

aşadar pentru $\frac{|tgx|}{\sqrt{3}}<1$, adică $x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ seria este absolut convergentă. In $x=-\frac{\pi}{3}$ seria este $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ serie divergentă şi în $x=\frac{\pi}{3}$ avem seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care este convergentă conform criteriului Leibniz , propoziţia II.3.10.). In concluzie mulţimea de convergenţă este $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

Seria derivatelor este $\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}tg^{n-1}x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; un studiu asemănător arată că multimea de convergenţă este $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$.

III.4.9. Să se studieze convergenţa uniformă a seriei:

$$\sum_{n\geq 1}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}],\ x\in[0,1];$$

Se poate integra termen cu termen?

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $s_n(x) = nxe^{-nx}$ şi $\lim_{n\to\infty} s_n(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$; şirul nu converge uniform deoarece $s_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} \neq 0$ şi totuşi funcţia limită este continuă pe [0,1]. Condiţiile transferului de integrabilitate nu sunt îndeplinite; dacă integrăm totuşi, termen cu termen seria pe [0,1] obţinem:

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^1 [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]dx = \sum_{n\geq 1}(e^{1-n} - e^{-n}) = 1 \neq 0$$

III.4.10. Stabiliţi mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de puteri şi calculaţi suma lor:

a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; c) $1+\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

Ind. a)Calculând $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, obţinem intervalul de convergenţă (-1,1); în $x = 1$ avem seria armonică alternată (convergentă) iar în $x = -1$ avem seria armonică înmulţită cu -1 (divergentă), asadar mulţimea de convergenţă este (-1,1]. Definim astfel f: (-1,1] $\to \boldsymbol{R}$ prin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n};$$

conform teoremei III.4.3.avem $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-!)^{n+1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$, $\forall\, |x| < 1$ şi astfel $f(x)$ = $\ln(1+x) + C$, $\forall\, |x| < 1$. Facând $x = 0$, obţinem $C = 0$.

Aplicând teorema III.4.2.obţinem $f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2$.

b) Intervalul de convergenţă este (-1,1); în punctele 1 şi -1 este verificat criteriul Leibniz (propoziţia II.3.10) deci mulţimea de convergenţă este [-1,1]. Derivând seria termen cu termen obţinem : $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall\, |x| < 1$.

Aşadar $f(x) = arctgx + C$, $\forall\, |x| < 1$; făcând $x = 0$ deducem $C = 0$; din teorema III.4.2. rezultă $f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} arctgx = \frac{\pi}{4}$ şi $f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} arctgx = -\frac{\pi}{4}$.

Suma seriei este restrictia funcţiei *arctg* la [-1,1].

Merită reţinut că astfel am stabilit suma seriei numerice: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

c) raza de convergenţă este 1;

făcând $x = 1$ obţinem seria din problema II.3.18, care este absolut convergentă pentru $\alpha \geq 0$, şi semiconvergentă pentru $\alpha \in (-1,0)$;

pentru $x = -1$ seria obţinută este absolut convergentă pentru $\alpha \geq 0$; pentru $\alpha < 0$ aplicăm criteriul Raabe –Duhamel (propoziţia II.3.8) şi cum

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \alpha + 1 < 1$, seria este divergentă.

Aşadar dacă $\alpha > 0$ mulţimea de convergenţă este [-1,1]; $\alpha \in (-1,0)$, avem (-1,1], $\alpha < 0$ avem (-1,1).

Scanned with OKEN Scanner

Fie f suma acestei serii pe (-1,1); prin derivare obţinem:

$$f'(x)=\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots,\ \forall x\in(-1,1);$$

evaluăm: $f'(x)+xf'(x)=\alpha f(x),\ \forall x\in(-1,1)$; şi deducem : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{1+x}$ sau $\ln f(x)=\alpha\ln(1+x)+C,\ \forall x\in(-1,1)$. Cum $f(0)=1$, rezultă $C=0$, deci $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\forall x\in(-1,1)$.

Aşadar, suma căutată este restricţia funcţiei $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ la mulţimea de convergenţă a seriei; seria aceasta se numeşte *seria binomială.*

III.4.11. Demonstraţi că seria $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ este convergentă şi să i se calculeze suma cu ajutorul seriilor de puteri .

Ind. Din criteriul Leibniz rezultă convergenţa seriei. Pentru determinarea sumei se consideră seria de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$; mulţimea de convergenţă este (-1,1], notând cu f suma seriei avem $f(1)$ tocmai suma seriei date. Prin derivare obţinem $f'(x)=\frac{1}{1+x^3}$, $\forall x\in(-1,1)$ şi astfel $f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; din $x=0$, obţinem $C=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Din teorema III.4.2. avem: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

III.4.12. Să se arate că funcţia $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x>-1$, $\alpha\notin N$, este dezvoltabilă în serie de puteri, să se găsească această dezvoltare specificându-se intervalul pe care este valabilă.

Ind. Funcţia este indefinit derivabilă: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$; seria Mac-Laurin corespunzătoare este : $1+\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

Am studiat această serie în problema III.4.10 , stabilind mulţimea de convergenţă şi suma sa; acum vom arăta că functia dată (numită *funcţia biniomială*) este dezvoltabilă în serie de puteri pe (-1,1).

Vom arăta că restul de ordin n din formula Taylor tinde la zero când $n\to\infty$, $\forall x\in(-1,1)$ considerând restul Cauchy:

$$R_n(x)=\frac{\alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta.x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(\alpha-1-n-1)x^n}{n!}\alpha.x(1+\theta.x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta.x}\right)^n$$

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{(\alpha-1)...(\alpha-n)(\alpha-1-n-1)x^n}{n!}$ reprezintă termenul general al seriei binomiale, care este convergentă pentru $|x|<1$, aşadar : $\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)...(\alpha-n)(\alpha-1-n-1)x^n}{n!}=0$

Pe de altă parte: $|\alpha.x|(1-|x|)^{\alpha-1}<|\alpha.x(1+\theta.x)^{\alpha-1}|<|\alpha.x|(1+|x|)^{\alpha-1}|$ şi $0\le\left(\frac{1-\theta}{1+\theta.x}\right)^n<1$, rezultând astfel că $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, $\forall\,|x|<1$, adică :

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\forall\,|x|<1.$$

Se observă că dacă $\alpha\in N$ avem *binomul Newton.*

III.4.13. Găsiti dezvoltarea în serie de puteri a următoarelor funcţii, specificând intervalul pe care este valabilă:

a) $f(x)=\arcsin x, x\in[-1,1]$; b) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x\in(-1,1)$;

c) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), x\in R$; d) $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}, x\in R\setminus\{-2,-3\}$;

e) $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, x\in(-1,1)$; e) $f(x)=\cos^3 x, x\in R$;

f) $f(x)=arctgx, x\in R$.

Ind. a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $x\in(-1,1)$; vom înlocui în dezvoltarea funcţiei binomiale pe x cu $-t^2$ şi pe α cu $-\frac{1}{2}$, obţinând: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$, $|t|<1$; integrăm termen cu termen pe $[0,x]$ cu $|x|<1$ şi astfel:

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1).$$

Această serie este convergentă în punctele $x=1$, $x=-1$, aşadar dezvoltarea este valabilă pe $[-1,1]$.

Luând $x=1$ obţinem: $\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

b) se lucrează analog: $f'(t)=(1-t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$; prin integrare termen cu termen pe $[0,x]$, cu $|x|<1$ obţinem :

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1;$$

b) $f'(t)=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$, $|t|<1$, de unde

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|<1;$$

Scanned with OKEN Scanner

d) $\frac{3x}{x^2+5x+6}=\frac{9}{x+3}-\frac{6}{x+2}=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=$

$=3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n$, pentru $|x|<2$;

e) $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$, $|t|<1$, de unde

$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|\le 1$(deoarece seria obținută este convergentă în ± 1).

f) ne amintim formula: $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ şi folosim dezvoltarea lui cosx:

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{3+9^n}{(2n)!}.x^{2n},\ x\in R;$$

g) $f'(t)=(1+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$; prin integrare termen cu termen pe $[0, x]$, cu $|x|<1$ obținem : $arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|\le 1$.

III.4.14. Să se calculeze $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ cu patru zecimale exacte.

Ind. Stim că nu se poate calcula primitiva funcției $f(x)=e^{-x^2}$, de aceea o vom dezvolta în serie Mac-Laurin şi vom folosi propoziția III.4.11:

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x\in R;$$

făcând $x=1$, deducem :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\ldots;$$

Luând în calcul suma primilor şapte termeni ai seriei , eroarea comisă este mai mică decât $\frac{1}{75600}$ şi obținem $\int_0^1 e^{-x^2}dx=0{,}7468\ldots$

III.4.15. Să se calculeze valoarea integralei $\int_0^1 x^x dx$ cu trei zecimale exacte.

Ind. $x^x=e^{x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$, serie ce este uniform convergentă pe [0,1], deci se poate integra termen cu termen:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x\ln x)^n dx .$$

$\int_0^1 (x\ln x)^n dx$ poate fi calculată cu o formulă de recurență:

$$I_{k,n} = \int_0^1 x^k \ln^n x dx = -\frac{n}{k+1} I_{k,n-1} = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^n} I_{k,0} = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$$ și astfel

$$\int_0^1 (x\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}} .$$

Seria obținută este alternată și îndeplinește condițiile criteriului Leibniz, așadar eroarea comisă dacă aproximăm suma seriei cu suma primilor n termeni este mai mică decât $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$;

condiția $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{10^3}$ este îndeplinită pentru $n = 4$.

Remarcă

Calculul integralei $\int_0^1 x^x dx$ este deosebit de complicat; în Maple se rezolvă imediat (în 55sec):

```
> evalf(int(exp(x*ln(x)),x=0..1));
```

0 .7834305107

III.4.16. Folosind o serie de puteri convenabil aleasă, să se calculeze $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cu șase zecimale exacte.

Ind. Deoarece $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, făcând $x = -\frac{1}{2}$, obținem: $e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$;

pentru a obține $\frac{1}{2^n n!} < \frac{1}{10^6}$ vom lua $n = 7$, deci $e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{7} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = 0{,}604188$.

In continuare prezentăm un program de calcul al unei integrale Riemann $\int_0^1 f(x)dx$, în care funcția de integrat este aproximată prin polinomul Bernstein ce i se asociază

```
program Bernstein;
uses crt;
var n,m,i:integer;
  Bn,s,p:real;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
  c:char;
function f(x:real):real;
      begin
      f:=ln(x+1);
      end;
function comb(n,k:integer):integer;
      begin
      if n<k then comb:=0
      else
        if (n=k) or (k=0) then comb:=1
        else comb:=comb(n-1,k)+comb(n-1,k-1);
      end;
function putere(a,x:integer):real;
      var i:integer;
        put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to x do
        put:=put*a;
      putere:=put;
      end;

begin
clrscr;
repeat
    writeln('Mai doriti?');
    c:=readkey;
    if c='d' then
      begin
      write('n=');read(n);
      Bn:=0;
      for m:=0 to n do
        begin
        s:=0;
        for i:=0 to n-m do
          begin
          p:=putere(-1,i);
          s:=comb(n-m,i)*putere(-1,i)*1/(m+i+1);
          Bn:=Bn+f(m/n)*comb(n,m)*s;
          end;
        end;
      writeln(Bn:6:3);
      end;
until c='n';
readln;
end.
```

Scanned with OKEN Scanner

1). $\int_0^1 \ln(x+1)dx$=0.3862

Mai doriti?
n=5
0.378
Mai doriti?
n=10
0.382
Mai doriti?
n=15
0.384

2). $\int_0^1 \sqrt{x}dx = 0.6666$

Mai doriti?
n=5
0.625
Mai doriti?
n=10
0.646
Mai doriti?
n=15
0.653

III.5. *Integrale improprii*

III.5.1. Să se studieze natura şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea următoarelor integrale:

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$; 2) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$; 3) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; 4) $\int_0^\infty \frac{arctgx}{(x^2+1)^{3/2}}dx$;

5) $\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx$; 6) $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$; 7) $\int_0^\infty e^{-x}\sin xdx$; 8) $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$; 9) $\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$.

Ind. Pentru studiul convergenţei aplicăm corolarul de la propoziţia III.5.3; integralele 1),2),3) sunt convergente ;

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = (\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}})|_0^\infty = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$;

Scanned with OKEN Scanner

2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = (\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg(x\sqrt{2}+1) + + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg(x\sqrt{2}-1))|_0^{\infty} =$

$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

3) merită reamintit modul de calcul al primitivei $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$: Se integrează $\int \frac{dx}{(x^2+1)}$ prin părţi: $\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \int x' \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2dx}{(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+1} +$

$-2\int \frac{dx}{(x^2+1)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$,

rezultând: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{x}{x^2+1} + arctgx)|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$.

Cu acelaşi corolar se arată convergenţa integralelor 4),5),6); să calculăm împreună valoarea lor:

4) $\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \int_0^{\infty} (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' arctgxdx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}arctgx|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx =$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 1$

5) $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{-1}{x}\right)' arctgxdx = -\frac{1}{x}arctgx|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}dx = 1+$

$+ \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}|_1^{\infty} = 1 + \frac{\ln 2}{2}$;

6) $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx$ este convergentă pe baza aceluiaşi corolar,

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = -e^{-x}x^n|_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = n.I_{n-1} = n!$$

7) pentru studiul convergenţei aplicăm propoziţia III.5.3. şi anume:

$|e^{-x}\sin x| \le e^{-x}$ şi $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$, deci integrala este convergentă; în calcul se aplică formula de integrare prin părţi ; avem: $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin xdx = 1/2$

8)-9) sunt divergente, rezultat ce se obţine imediat prin aplicarea corolarului amintit.

III.5.2. Studiaţi convergenţa următoarelor integrale şi în caz afirmativ calculaţi-le:

1) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 3) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(x+1)^2}$; 4) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bxdx$, $a>0$;

5) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$; 6) $\int_0^{\infty} x^3e^{-x^2}dx$.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$; 3) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{a}{a^2+b^2}$; 5)- 6)$\frac{1}{2}$.

III.5.3. Calculaţi următoarele integrale (sau demonstraţi divergenţa lor):

1) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; 2) $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$; 3) $\int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$;

4) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ 6) $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ind. Pentru studiul convergenţei se foloseşte corolarul de la propoziţia III.5.6.

1) $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^\alpha \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, pentru α=1/2;

$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^\alpha \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, pentru α=1/2.;

merită folosită substituţia $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ şi astfel : $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$;

2) se foloseşte aceeaşi substituţie şi $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$;

3) folosim substituţia $x = 3\cos^2 t + 5\sin^2 t$; atunci: $\int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} = 4\pi$;

4) substituţia $\frac{1}{2-x} = t$ şi $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$;

5) substituţia $\frac{1}{2+x} = t$;

6) cu substituţia $x = \sin t$, obţinem $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t dt$; vezi problema III.3.7.

III.5.4. Calculaţi următoarele integrale, după ce aţi verificat că sunt convergente:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(tgx)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$.

Ind. 1) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha.\ln(tgx) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(tgx)}{x^{-\alpha}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1+tg^2 x}{tgx}}{-\alpha.x^{-\alpha-1}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(1+tg^2 x)}{-\alpha.}.\frac{x}{tgx}.x^\alpha = 0$,

pentru α=1/2 (de exemplu);

$\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}(\frac{\pi}{2}-x)^\alpha.\ln(tgx) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y^\alpha.\ln(ctgy) = -\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y^\alpha.\ln(tgy) = 0$, pentru α=1/2; avem

astfel demonstrată convergenţa integralei.

Scanned with OKEN Scanner

Cu substituția $x=\frac{\pi}{2}-t$, obținem $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(tgx)dx=0$;

2) studiul convergenței integralei este analog primului caz; pentru calculul efectiv se face substituția $x=2t$ și obținem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2t)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t)dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt.$$

In calculul integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt$, făcând substituția $t=\frac{\pi}{2}-u$, avem: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt=$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$ și astfel : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{4}\ln 2$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{4}\ln 2$.

III.5.5. Să se calculeze a) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$.; b) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{|x^2-4|}}$

Ind. a) Deoarece $\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}.\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=1$, pentru $\alpha=2$ și

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)^{\alpha}.\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\alpha}.\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, pentru $\alpha=1/2$

integrala este convergentă;

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}=\int_0^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Calculăm prima integrală, făcând substituția $\frac{1}{1+x}=t$ și obținem:

$$\int_0^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=1;$$

în a doua integrală facem substituția $\frac{1}{x}=t$ și avem:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\int_0^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=1.$$

b) analog

Scanned with OKEN Scanner

III.6. *Funcţii cu variaţie mărginită*

III.6.1. Arătaţi că următoarele funcţii nu sunt cu variaţie mărginită:

1) $f:[0,\frac{2}{\pi}]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, x\in(0,\frac{2}{\pi}] \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$;

2) $f:[0,1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, x\in(0,1] \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$.

Ind. 1) Vom construi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}\subset \mathcal{D}[0,\frac{2}{\pi}]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} V_{\Delta_n} f=\infty$, alegând punctele din $[0,\frac{2}{\pi}]$ în care $\sin\frac{1}{x^2}=\pm 1$ şi respectiv $\sin\frac{1}{x^2}=0$; astfel: $\Delta_n: 0<\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}<\sqrt{\frac{2}{2n\pi}}<\sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}}<\ldots<\sqrt{\frac{2}{2\pi}}<\frac{2}{\pi}$ şi $V_{\Delta_n} f=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{(n+1)\pi}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} V_{\Delta_n} f=\sum\limits_{n\ge 1}\frac{2}{(n+1)\pi}$, serie ce este divergentă.

2) se consideră diviziunile $\Delta_n: 0<\frac{1}{4n}<\frac{1}{4n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1, n\in \boldsymbol{N}$

$V_{\Delta_n} f=\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{2}{2k}$, serie divergentă.

III.6.2. Arătaţi că $f:[0,1]\to \boldsymbol{R},\ f(x)=\begin{cases} x^4\left[\frac{1}{x}\right], x\in(0,1] \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ este o funcţie cu variaţie mărginită.

Ind. Fie $\Delta: 0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$; vom calcula $V_\Delta(f)$:

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=\begin{cases} k(x_i^4-x_{i-1}^4)<k(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4})<\frac{4}{k^3(k+1)}, \\ \qquad pentru \quad x_i,x_{i-1}\in(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}] \\ kx_i^4-(k+1)x_{i-1}^4<\frac{k}{k^4}-\frac{k+1}{(k+1)^4}<\frac{3}{k^3(k+1)}, \\ pentru \quad x_i\in(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}], x_{i-1}\in(\frac{1}{k+2},\frac{1}{k+1}] \end{cases}$$

deci $V_\Delta(f)\le\sum\limits_k\frac{4}{k^3(k+1)}<M$ deoarece este o serie convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

III.6.3. Stabiliţi care din funcţiile următoare sunt cu variaţie mărginită şi argumentaţi răspunsul:

1) $f_1: [0,1] \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, x \in [0,1) \\ 0, \quad x = 1 \end{cases}$;

2) $f_2: [0,1] \to \boldsymbol{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \cap Q \\ x^2, x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$;

3) $f_3: [1,e] \to \boldsymbol{R}$, $f_3(x) = \ln x$;

4) $P_n: [a,b] \to \boldsymbol{R}$, P_n fiind un polinom de grad n cu coeficienţi reali.

Ind. f_1 nu este mărginită pe [0,1], deci nu este cu variaţie mărginită; f_2 are discontinuităţi de speţa a doua , aşadar nu este cu variaţie mărginită; f_3 este monotonă şi astfel e cu variaţie mărginită; P_n este funcţie lipschitziană (problema III.1.17), deci este cu variaţie mărginită.

III.7. *Integrala Stieltjes- Riemann*

III.7.1. Calculaţi $\int_0^{2\pi} x dx^2$, $\int_0^{2\pi} \sin x dx^2$, $\int_0^1 x^n dx^n$;

Ind. se aplică propoziţia III.7.7.

III.7.2. Calculaţi $\int_1^5 \frac{1}{(x+1)^2} d[x]$; $\int_1^{e^2} \ln x d[x^2]$; $\int_0^{2\pi} \ln x d[\cos x]$

Ind. se aplică teorema III.7.4

III.7.3. Se dau funcţiile: $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$, $x \in [1, \infty)$ şi

$$g(x) = (-1)^n [x], x \in [n, n+1), n \in N^*;$$

să se calculeze $\int_1^m f(x) dg(x)$ şi $\lim_{n \to \infty} \int_1^m f(x) dg(x)$.

Ind. $\int_1^m f(x) dg(x) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(2n+1)^2} [(-1)^{n+1}(n+1) - (-1)^n n] = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} (2n+1)$

$= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}$;

Scanned with OKEN Scanner

$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dg(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}=\frac{1-\pi}{4}$ (pentru ultima egalitate a se vedea problema III.4.10.b) şi astfel am calculat o integrala Stieltjes Riemann improprie.

III.7.4. Se dau funcţiile : $f(x)=\frac{1}{x+1}, x\geq 1$ şi $g(x)=\frac{1}{n}, x\in[n,n+1)$; să se calculeze $\int_1^n f(x)dg(x)$ şi $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dg(x)$.

Ind. $\int_1^n f(x)dg(x)=\sum_{n=1}^{n-1}\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{n-1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$;

$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dg(x)=\frac{1}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

IV. SPATII METRICE

IV.1. *Noţiuni introductive*

IV.1.1. Fie $x \in \boldsymbol{R}^n$; considerăm:

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, (norma *euclidiană*)

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$,

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$,

Verificaţi că aceste expresii sunt norme pe $\boldsymbol{R}^n$. Care sunt bilele deschise corespunzătoare cu centrul în origine şi rază 1 din $\boldsymbol{R}^2$.

Ind.

$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; x^2+y^2<1\}$;

$B_1((0,0),1) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; |x|+|y|<1\}$;

$B_\infty((0,0),1) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; \max\{|x|,|y|\}<1\}$

IV.1.2. Două norme $\|\ \|_1$ şi $\|\ \|_2$, pe un spaţiu vectorial E, se numesc *echivalente* dacă există constantele reale a şi b , astfel încât:

$$\forall\, x \in E \text{ avem } a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1 \quad .$$

Arătaţi că norma euclidiană, $\|\ \|_1$ şi $\|\ \|_\infty$ (definite în exerciţiul IV.1.1)sunt echivalente

Ind. Fie $x \in \boldsymbol{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Se arată că:

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\| \le n\,\|x\|_\infty$$

Pentru verificarea inegalităţii $\|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|$ se foloseşte inegalitatea Cauchy-Schwarz.

IV.1.3. Fie $(E, \|\ \|)$ un spaţiu liniar normat. Arătaţi că:

a) $\forall\, x \in E$ avem $\|-x\| = \|x\|$

b) $\forall\, x, y \in E$ avem $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$

c) $\forall\, x_1, x_2, \ldots x_n \in E$ avem $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \le \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$

Ind.b) Tinem seama că: $\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$ şi respectiv

$$\|y\| \le \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.1.4 Fie (r_{ij}) o matrice reală de tip $n\times n$, simetrică (adică $r_{ij} \quad r_{ji}$), pozitiv definită $(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} x_i x_j > 0, \forall x = (x_1,x_2,\dots x_n) \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\theta\}$. Verificați că aplicația $\langle x,y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} x_i y_j$ definește un produs scalar pe $\boldsymbol{R}^n$.

IV.1.5 Fie o mulțime oarecare nevidă; definim aplicația $d : E \times E \to \boldsymbol{R}_+$ prin $d(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$; verificați că d este o distanță pe E. Determinați bilele deschise, respectiv închise de centru $x_0 \in E$ și rază $\frac{1}{2}$, 1, 2.

IV.1.6 Fie (E, d) un spațiu metric și $x_1,x_2,\dots x_n \in E$. Arătați că :
$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

IV.1.7 Fie E un spațiu vectorial; o mulțime $A \subset E$ este mulțime *convexă* dacă
$$\forall x,y \in A, \ \forall t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + ty \in A$$
Arătați, că într-un spațiu vectorial normat, bilele deschise (închise) sunt mulțimi convexe.

IV.2. *Siruri în spații metrice.*

IV.2.1 Fie (E,d) un spațiu metric și $x_0 \in E$; arătați că sistemul vecinătăților punctului x_0, $V(x_0)$ are următoarele proprietăți:

a) $V \in V(x_0) \Rightarrow x_0 \in V$

b) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in V(x_0)$

c) $V \in V(x_0)$ și $A \supset V \Rightarrow A \in V(x_0)$

d) $\forall V \in V(x_0)$, $\exists W \in V(x_0)$ astfel încât $\forall y \in W \Rightarrow V \in V(y)$.

Ind. In demonstrarea punctelor a), b), c) se folosește definiția vecinătății unui punct;d) afirmă că nu orice vecinătate a unui punct x_0 este vecinătate pentru toate elementele sale. In demonstrație, folosind definiția, obținem existența unei bile deschise $B(x_0,\varepsilon) \subset V$ și vom considera $W = B(x_0,\varepsilon)$.

IV.2.2 Argumentați cu ajutorul definiției că : $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}) = (0,0)$

Ind evaluând $d((\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}),(0,0)) = \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} < \varepsilon$, obținem:

Scanned with OKEN Scanner

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}}\right] + 1$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $d((\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}),(0,0)) < \varepsilon$

IV.2.3 Fie (E, d) un spaţiu metric şi $A \subset E$; arătaţi că $x_0 \in A'$ dacă şi numai dacă $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$ $card(A \setminus \{x_0\}) \cap V \geq \aleph_0$.

Ind. Argumentarea se reduce la faptul că numai mulţimile infinite admit puncte de acumulare

IV.2.4. Arătaţi că într-un spaţiu metric, derivata unei mulţimi are următoarele proprietăţi:

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

c) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

Ind. Se poate folosi definiţia punctului de acumulare, sau propoziţia IV2.5., Remarcăm că proprietatea c) se extinde la familii finite de mulţimi, dar nu şi la una infinită; în acest caz avem relaţia:

$$\left(\bigcup_i A_i\right)' \supset \bigcup_i A_i' \text{ ; (e.g. } A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \left(\bigcup_{n \in N} A_n\right)' = \{0\} \supset \bigcup_{n \in N} A_n' = \phi).$$

IV.2.5. Intr-un spaţiu metric (E,d) şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt şiruri Cauchy. Arătaţi că şirul $(d(x_n, y_n))_n$ este convergent.

Ind. Sirul $(d(x_n, y_n))_n$ fiind şir de numere reale pozitive, este suficient să arătăm că este şir Cauchy. Din proprietăţile metricii avem:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

obţinând: $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$.

Cum $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt şiruri Cauchy, obţinem ca şirul $(d(x_n, y_n))_n$ este şir Cauchy.

IV.2.6.

Intr-un spaţiu normat $(E, \| \ \|)$ şirul $(x_n)_n$ este şir Cauchy. Arătaţi că şirul $(\|x_n\|)_n$ este convergent.

Ind. Sirul $(\|x_n\|)_n$ este un şir de numere reale pozitive , aşadar este suficient să arătăm că este şir Cauchy, bazându-ne pe inegalitatea : $\|\|x_n\| - \|x_m\|\| < \|x_n - x_m\|$

IV.2.7. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri din $\boldsymbol{R}^3$:

$$x_n = (\sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin 2^n, n(\sqrt[n]{e} - 1))$$

$$y_n = (\frac{[na]}{n}, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}), n \in N$$

IV.2.8. Fie $x_n = \left(\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)$, $n \in N$. Să se determine parametrul real λ astfel încât limita şirului x_n să fie la distanţă minimă în $\boldsymbol{R}^3$ de punctul $(1, e^{-\lambda}, \pi)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right) = (e^{\lambda}, 1, 0)$.

$d((e^{\lambda},1,0),(1,e^{-\lambda}\pi)) = \sqrt{(e^{\lambda}-1)^2+(1-e^{-\lambda})^2+\pi^2}$, aşadar distanţa este minimă pentru $\lambda = 0$.

IV.3. *Topologia spaţiilor metrice*

IV.3.1. Fie N mulţimea numerelor naturale şi $\mathcal{D}$ familia formată din ϕ şi toate mulţimile de forma $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, $n \in N$. Arătaţi că $\mathcal{D}$ defineşte o topologie pe N şi determinaţi familia mulţimilor închise din $(N, \mathcal{D})$.

Ind. Se verifică proprietăţile $(D1)$, $(D2)$, $(D3)$; (a se vedea teorema IV.3.1). Familia mulţimilor închise $\mathcal{F}$ este formată din N şi mulţimile $F_n = CD_n = \{0,1,2,..,n-1\}$.

IV.3.2. Fie R mulţimea numerelor reale şi $\mathcal{D}$ familia formată din ϕ şi acele submulţimi D ale lui R pentru care $x \in D$ implică $-x \in D$.

1) Arătaţi că $\mathcal{D}$ defineşte o topologie pe R;

2) Demonstraţi că o mulţime este închisă în $(R, \mathcal{D})$ dacă şi numai dacă este deschisă.

Ind. 1) Se verifică proprietăţile $(D1)$, $(D2)$, $(D3)$;

2) Fie $F \in \mathcal{F}$; fie $x \in F \Rightarrow x \notin C_F \Rightarrow -x \notin C_F$ (dacă $-x \in C_F \Rightarrow -(-x) \in C_F) \Rightarrow -x \in F$, adică $F \in \mathcal{D}$.

Fie $D \in \mathcal{D}$; avem $D \in \mathcal{F} \Leftrightarrow CD \in \mathcal{D}$; (fie $x \in CD \Rightarrow x \notin D \Rightarrow -x \notin D \Rightarrow -x \in CD$ rezultând $CD \in \mathcal{D}$).

IV.3.3. Arătaţi că într-un spaţiu metric mulţimile formate dintr-un singur punct sunt închise.

Ind. Vom folosi proprietatea de separare a spaţiului metric (E,d); fie $x \in E$; a arăta că $\overline{\{x\}} \subset \{x\}$ este echivalent cu a arăta că $C\{x\} \subset C\overline{\{x\}}$.

Dacă $y \in C\{x\}$, adică $y \neq x$, existând astfel $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \in \mathcal{V}(y)$ disjuncte. Deci $x \notin V$ şi astfel $V \cap \{x\} = \phi$ ceea ce înseamnă că $y \notin \overline{\{x\}}$.

IV.3.4. Într-un spaţiu metric (E,d) avem : 1) $\overline{A} = A \cup A'$,

2) $FrA = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$, $\forall A \subset E$.

Ind. 1) Demonstrăm prin dublă incluziune, folosind definiţiile punctului aderent, respectiv punctului de acumulare.

2) $FrA = \overline{A} \cap C\overline{A} = \overline{A} \cap C(\operatorname{int} A) = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.3.5. Să se determine A' int A, $\overline{A}$, FrA, dacă:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; z=0,\ x^2+y^2<1\}$$

Ind. $A' = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ; z=0,\ x^2+y^2 \le 1\}$, int $A = \phi$, $\overline{A} = A$ şi $FrA = A$.

IV.3.6. Fie (E,d) un spaţiu metric şi $A, B \subset E$; arătaţi că:

a) $A \subset B \Rightarrow$ int $A \subset$ int B şi $\overline{A} \subset \overline{B}$;

b) int$(A \cap B)$ = int$A \cap$ int$B$ şi $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

c) int(int$A$) = int$A$ şi $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Ind. a) consecinţe imediate ale definiţiilor şi a egalităţii: $C(intA) = C\overline{A}$.

IV.3.7. Fie $A \subset \mathbf{R}^2$; să considerăm A ca o submulţime a lui $\mathbf{R}^3$ (identificând eventual pe A cu o submulţime din planul xOy din $\mathbf{R}^3$). Arătaţi că A este compactă in $\mathbf{R}^2$ dacă şi numai dacă este compactă în $\mathbf{R}^3$.

Ind. Se va folosi teorema IV.3.4.

IV.3.8. Să se demonstreze că orice submulţime finită a unui spaţiu metric este compactă.

Fie $(x_n)_n$ un şir convergent într-un spaţiu metric (E,d); verificaţi că mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\} \cup \{x\}$ este compactă.

IV.3.9. Demonstraţi că reuniunea unui număr finit de mulţimi compacte este o mulţime compactă.

IV.3.10. Demonstraţi că în $\mathbf{R}^n$ o mulţime este relativ compactă dacă şi numai dacă este mărginită.

IV.4. *Funcţii continue în spaţii metrice*

IV.4.1. Fie (E,d), (E_1,d_1) două spaţii metrice şi $f : E \to E_1$ o funcţie continuă; arătaţi că $\forall A \subset E$ avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Ind. Fie $y \in f(\overline{A})$; există $x \in \overline{A}$ astfel încât $y = f(x)$. Conform teoremei IV.3.3, există un şir $(x_n)_n \subset A$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; rezultă existenţa şirului $(f(x_n))_n \subset f(A)$, a cărui limită este $f(x) = y$, datorită continuităţii lui f; aşadar $y \in \overline{f(A)}$.

IV.4.2. Fie (E,d) un spaţiu metric şi $f : E \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă; fie $\alpha \in \mathbf{R}$. Arătaţi că $F_\alpha = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$ este o mulţime închisă.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Remarcând că $F_a = f^{-1}(\{\alpha\})$, aplicăm teorema IV.4.1, ţinând seama că $\{\alpha\}$ este mulţime închisă în $\boldsymbol{R}$.

IV.4.3. Fie (E,d) un spaţiu metric şi $f, g: E \to \boldsymbol{R}$ funcţii continue .

Arătaţi cămulţimea $D = \{x \in E;\ f(x) < g(x)\}$ este deschisă, în timp ce mulţimea $F = \{x \in E; f(x) \le g(x)\}$ este închisă.

Ind. Construim funcţia $h = f - g$, funcţie ce este continuă; aplicăm teorema III.2.1, ţinând seama că $D = h^{-1}((-\infty,0))$ si $F = h^{-1}((-\infty,0])$.

IV.4.4. Fie (E, d) un spaţiu metric, $A \subset E$ şi E_1 un spaţiu liniar normat. Notăm $C(A)$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în E_1, continue. Arătaţi că $C(A)$ este spaţiu liniar. In cazul în care A este compactă, verificaţi că $\|f\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ defineşte o normă pe $C(A)$ (această normă se numeşte *norma convergenţei uniforme*)

IV.4.5. Fie (E, d) şi (E_1, d_1) două spaţii metrice; *şirul de funcţii* este o aplicaţie $f: \boldsymbol{N} \to Hom(A,E_1)$, unde $A \subset E$. şi notăm $f(n) = f_n$.

Sirul $(f_n)_n$ *converge punctual* la f pe $A_1 \subset A$ dacă

$\forall x \in A_1, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(x,\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \ge n_0$ avem $d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Sirul $(f_n)_n$ *converge uniform* la f pe A_1 dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \text{ astfel încât } \forall n \ge n_0 \text{ avem } d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in A_1.$$

Arătaţi că:

1) dacă $(f_n)_n$ un şir de funcţii mărginite pe A, uniform convergent pe A, atunci funcţia limită f este mărginită pe A.

2) dacă $(f_n)_n$ un şir de funcţii continue pe A, uniform convergent pe A, atunci funcţia limită f este continuă pe A.

Ind. Merită revăzute demonstraţiile propoziţiilor III.4.2, III.4.3., care se adaptează cu uşurinţă.

IV.4.6. Spaţiul funcţiilor mărginite pe A, A mulţime arbitrară într-un spaţiu metric (E,d), cu valori în spaţiul Banach E_1 este un subspaţiu al spaţiului $Hom(A,E_1)$, pe care-l notăm $l_\infty(A, E_1)$; verificaţi că este un spaţiu normat, în raport cu norma supremum: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$

Demonstraţi următoarea afirmaţie: şirul $(f_n)_n \subset l_\infty(A, E_1)$ converge uniform către f pe $A \Leftrightarrow (f_n)_n$ converge în sensul normei supremum în $l_\infty(A, E_1)$.

Ind. $f_n \overset{u}{\to} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \ge n_0$ avem $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$, $\forall x \in A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \ge n_0$ avem $\sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to \infty}{\to} 0$; conform problemei IV.4.5. $f \in l_\infty(A, E_1)$, deci $f_n \underset{in\ l_\infty(A,E_1)}{\to} f$

Scanned with OKEN Scanner

Remarcă

Se simplifică astfel demonstrația problemei III.4.1.: $f_n : [0,1) \to \boldsymbol{R}$, $f_n(x) = x^n$; $(f_n)_n$ nu converge uniform pe $[0,1)$, deoarece $\sup_{x\in[0,1)} \|f_n(x) - f(x)\| = 1$.

IV.4.7. Fie $(f_n)_n$ un şir din $Hom(A, E_1)$, unde A este mulţime arbitrară într-un spaţiu metric (E,d) şi E_1 este spaţiu Banach; putem defini seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 0} f_n = ((f_n)_n, (s_n)_n) \text{ unde } s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n .$$

Definiţi noţiunea de serie de funcţii punctual convergentă, respectiv uniform convergentă; scrieţi enunţul criteriului lui Cauchy de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii şi demonstraţi-l. Scrieţi rezultatele cu privire la transferul de mărginire, respectiv continuitate în cazul seriilor de funcţii.

Ind. Seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă pe $A_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall\, n,m \geq n_0, m > n$ avem $\|f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\| < \varepsilon, \forall x \in A_1$

IV.4.8. Fie (E,d) spaţiu metric, E_1 un spaţiu Banach şi $A \subset E$; considerăm seria $\sum_{n\geq 0} f_n$, cu $f_n : A \to E_1$. Dacă există o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergentă cu proprietatea că: $\exists\, n_0 \in N$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ $\|f_n(x)\| < a_n$, $\forall x \in A$, atunci $\sum_{n\geq 0} f_n$ este absolut şi uniform convergentă.(*criteriul lui Weierstrass*)

Ind. Din primul criteriu de comparaţie rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ este convergentă, $\forall x \in A$, deci seria $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolut către un element din E_1, notat $f(x)$. Seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ fiind convergentă, avem conform criteriului lui Cauchy:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1 \in N \text{ astfel încât } \forall\, p > n > n_1 \quad \sum_{k=n+1}^{p} a_n < \varepsilon \quad .$$

Luând $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ obţinem

$$\forall\, p > n > n_2 \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{p} f_n(x) \right\| < < \sum_{k=n+1}^{p} \|f_n(x)\| < \sum_{k=n+1}^{p} a_n < \varepsilon \quad , \forall x \in A,$$

deci conform criteriului lui Cauchy, de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Remarcă

Dacă seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ satisface condiţiile criteriului lui Weierstrass, avem $\|f_n(x)\| < a_n$, $\forall x \in A$, adică $\sup_{x\in A} \|f_n(x)\| < a_n$, ceea ce implică $\|f_n\|_\infty < a_n$ şi conform primului criteriu al comparaţiei seria $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ este convergentă. Reciproc dacă seria $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge, putem alege $a_n = \|f_n\|_\infty$ şi aplicăm criteriul lui Weierstrass.

IV.5. *Operatori liniari şi continui*

IV.5.1 Compunerea a doi operatori liniari este de asemenea un operator liniar.

IV.5.2 Fie $T: E \to E_1$, atunci:

1) $T\theta_E = \theta_{E_1}$;

2) $T(E)$ este un subspaţiu liniar al lui E_1;

3) Mulţimea $N(T) = \{x \in E;\ Tx = \theta_{E_1}\}$, numită *nucleul lui T*, (se mai notează $Ker(T)$) este un subspaţiu liniar în E. T este injectiv dacă şi numai dacă ($Tx = \theta_{E_1} \Rightarrow x = \theta_E$), adică $N(T) = \{\theta_E\}$

Ind. 1) $T\theta_E = T(x-x) = Tx + T(-x) = Tx - Tx = \theta_{E_1}$.

2) fie $y_1, y_2 \in T(E) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in E$ astfel încât $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$; fie $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, atunci $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$, deci $\alpha y_1 + \beta y_2 \in T(E)$

3)dacă T este injectiv, pentru $x \neq \theta_E$ avem $Tx \neq T\theta_E = \theta_{E_1}$; reciproc, dacă $Tx_1 = Tx_2$ avem $T(x_1 - x_2) = \theta_{E_1}$ ceea ce implică $x_1 - x_2 = \theta_E$, adică $x_1 = x_2$.

IV.5.3. Fie $T: E \to E_1$; dacă T este inversabil, atunci $T^{-1}: T(E) \to E$ este liniar.

Ind. Fie $y_1, y_2 \in T(E)$ rezultă $\exists!\ x_i \in E$, $i=1,2$, astfel încât $Tx_i = y_i$; atunci $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \in T(E)$, deci $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

IV.5.4. Dacă $T : E \to E_1$ este un operator liniar şi continuu, atunci nucleul $N(T) = \{x \in E;\ Tx = \theta_{E_1}\}$ este un subspaţiu liniar închis.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Fie $x_0 \in \overline{N(T)}$; există un şir $(x_n)_n \subset N(T)$ astfel încât $x_n \xrightarrow[\text{în } E]{} x_0$ şi din continuitatea lui T rezultă $Tx_n \xrightarrow[\text{în } E]{} Tx_0 = \theta_{E_1}$ (deoarece $Tx_n = \theta_{E_1}$), deci $x_0 \in N(T)$.

IV.6. *Principiul contracţiilor*

Vom prezenta un program de rezolvare a unor ecuaţii cu metoda aproximaţiilor succesive:

1) $x - \sin x = 0.25$; pentru început programul stabileşte intervalul In care se află soluţia (rămâne să argumentaţi, pe baza cunoştinţelor de Analiză, de ce soluţia este unică şi cum stabilim intervalul [1,2] luat iniţial); se stabileşte că soluţia este în intervalul [1.1,1.3] ; vom pune ecuaţia sub forma $x = \sin x + 0.25$ şi aplicăm metoda aproximaţiilor succesive pornind de la $x_0 = 1.2$; se aproximează soluţia cu un x_n, n impus de noi şi se calculează eroarea comisă prin aceasta aproximare

2) $x = \sqrt[3]{1000 - x}$; se porneşte de la intervalul (9,10); considerăm $x_0 = 10$

```
program aproximatii_succesive;
uses crt;
const eps=0.2;
var a,b,E,er,val:real;
  n,i:integer;
  v:array[0..100] of real;
function putere(a:real;m:integer):real;
      var i:integer;
        put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
        put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function f(x:real):real;
      begin
      f:= x-sin(x)-0.25; {x-exp(1/3*ln(1000-x))}
      end;
function g(x:real):real;
      begin
      g:= sin(x)+0.25; {exp(1/3*ln(1000-x))}
      end;
procedure Bolzano(var a,b:real);
      var m:real;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
        begin
        if f(a)*f(b)>0 then write('Nu are nici o solutie pe acest interval!')
        else
          begin
          m:=(a+b)/2;
          while b-a>eps do
              begin
              if f(a)*f(m)<0 then b:=m
              else a:=m;
              m:=(a+b)/2;
              end;
          end;
        end;

begin
clrscr;
write('a=');read(a);
write('b=');read(b);
write('n=');read(n);
Bolzano(a,b);
{writeln(a:6:3);
writeln(b:6:3);}
v[0]:=(a+b)/2;
writeln(v[0]:6:3);
for i:=1 to n do
   begin
   v[i]:=g(v[i-1]);
   writeln(v[i]:6:3);
   end;
val:=1/300{cos(b)};
E:=abs(v[1]-v[0])*putere(val,n)/(1-val);
writeln(E);
readln;
end.
```

1). $x - \sin x = 0.25$

a=1

b=2

n=5

1.188

1.177

1.174

1.172

1.172

1.171

Eroarea: 4.1550363824E-15

2). $x = \sqrt[3]{1000 - x}$

a=9

b=10

Scanned with OKEN Scanner

n=5
9.938
9.967
9.967
9.967
9.967
9.967
Eroarea: 1.2083349287E-14

Următorul program rezolvă două ecuații cu metoda coardei; iată enunțul problemelor:

1) Găsiți rădăcina pozitivă a ecuației: $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$;
2) Calculați rădăcina din intervalul [3,4] a ecuației $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$

```
program metoda_coardei;
uses crt;
type vector=array[0..100] of real;
var a,b:real;
  n,k:integer;
  v:vector;
function putere(a:real;m:integer):real;
      var i:integer;
        put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
        put:=put*a;
      putere:=put;
      end;
function f(x:real):real;
      begin
      f:=putere(x,3)-0.2*putere(x,2)-0.2*x-1.2{putere(x,3)-2*putere(x,2)-4*x-7};
      end;
procedure coarda(var a,b:real;n:integer; var v:vector);
       var i:integer;
       begin
       if f(a)*f(b)>0 then write('Intervalul nu este corect dat!')
       else
         begin
         v[0]:=a;
         i:=1;
         while (i<=n) do
            begin
            v[i]:=v[i-1]-f(v[i-1])*(v[i-1]-b)/(f(v[i-1])-f(b));
            if f(a)*f(v[i])<0 then b:=v[i]
            else a:=v[i];
            i:=i+1;
            end;
         end;
       end;
begin
```


Scanned with OKEN Scanner

```
clrscr;
write('a=');read(a);
write('b=');read(b);
write('n=');read(n);
coarda(a,b,n,v);
for k:=0 to n do
   writeln(v[k]:10:10);
readln;
end.
```

1).
a=1
b=2
n=5
1.0000000000
1.0967741935
1.1485618454
1.1748452317
1.1878152252
1.1941254525

2).
a=3
b=4
n=5
3.0000000000
3.5263157895
3.6168180210
3.6298582438
3.6316847282
3.6319395260

Acest ultim program găseşte o rădăcină a ecuaţiei

$$x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 14x - 4 = 0$$

folosind ca valoare de start $x_0 = 0.8$

```
program metoda_tangentei;
uses crt;
const eps=0.0021;
var x0:real;
   n,i:integer;
   v:array[0..100] of real;
function putere(a:real;m:integer):real;
      var i:integer;
         put:real;
      begin
      put:=1;
      for i:=1 to m do
         put:=put*a;
```


Scanned with OKEN Scanner

```
        putere:=put;
        end;
function f(x:real):real;
        begin
        f:=putere(x,5)-6*putere(x,4)+15*putere(x,3)-20*putere(x,2)+14*x-4;
        end;
function fprim(x:real):real;
        begin
        fprim:=5*putere(x,4)+24*putere(x,3)+45*putere(x,2)-40*x-4;
        end;
begin
clrscr;
write('n=');read(n);
v[0]:=0.8;
i:=1;
while (i<=n) do
    begin
    v[i]:=v[i-1]-f(v[i-1])/fprim(v[i-1]);
    i:=i+1;
    end;
for i:=0 to n do
   writeln(v[i]:10:10);
writeln;
for i:=0 to n do
   if abs(v[i]-v[i-1])<eps then writeln(v[i]:10:10);
readln;
end.
```

```
n=15
0.8000000000
0.8069955157
0.8129358253
0.8181162954
0.8227187369
0.8268642754
0.8306382432
0.8341033197
0.8373070656
0.8402865225
0.8430711627
0.8456848598
0.8481472480
0.8504746878
0.8526809680
0.8547778264

0.8547778264
```

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

V.FUNCTII VECTORIALE

V.1. *Funcţii vectoriale de variabilă reală*

V.1.1. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$; arătaţi că dacă f este funcţie continuă atunci *graficul* ei $G_f = \{(x, f(x)); x \in \boldsymbol{R}\}$ este o mulţime închisă (în $\boldsymbol{R}^2$).

Ind. Vom aplica teorema IV.3.3.b.; fie şirul $(x_n, f(x_n))_n \subset G_f$, convergent la $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$. Deci $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$; dar f este continuă şi astfel $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$; aşadar $(x,y) = (x, f(x)) \in G_f$.

V.1.2. Fie $A \subset \boldsymbol{R}$; arătaţi că o funcţie $f: A \to \boldsymbol{R}^m$ este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt uniform continue pe A.

V.1.3. Fie $f: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$; arătaţi că f este continuă şi că mulţimea $C = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$ este conexă.

Ind. Componentele lui f fiind funcţii continue, f este funcţie continuă; mulţimea C este imaginea intervalului $[0, 2\pi]$ printr-o funcţie continuă, deci este mulţime conexă.

V.1.4. Să se arate că graficul unei funcţii continue $f: I \to \boldsymbol{R}$, $I \subset \boldsymbol{R}$ interval, este o mulţime conexă.

Ind. Considerăm funcţia $g: I \to \boldsymbol{R}^2$, $g(x) = (x, f(x))$ care este continuă şi remarcăm că $g(I) = G_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$.

V.1.5. Calculaţi $f'(1)$ în cazul $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$, $f(x) = (e^x, x^2 + 1, arctg\, x)$.

R. $f'(1) = (e, 2, 1/2)$

V.1.6. Calculaţi derivatele de ordinul întâi ale funcţiilor :

a) $f(x) = \left(e^{-x^2} \ln x, arctg\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; b) $f(x) = \left(arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}, x \arcsin(\ln x)\right)$.

R. a) $f'(x) = \left(e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x} - 2x\ln x\right), -\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;

b) $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \arcsin(\ln x) + \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)$

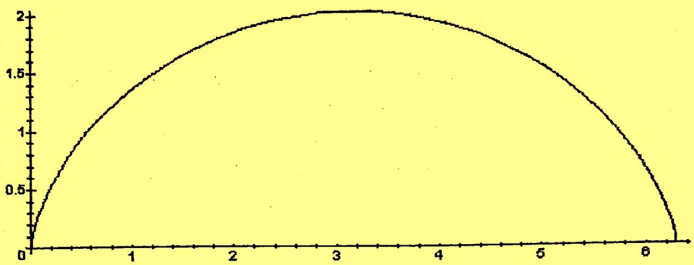
Scanned with OKEN Scanner

V.2. *Drumuri , curbe*

V.2.1. Calculaţi lungimea arcului *cicloidei*: $x = a(t - \sin t)$
$y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$., desenând

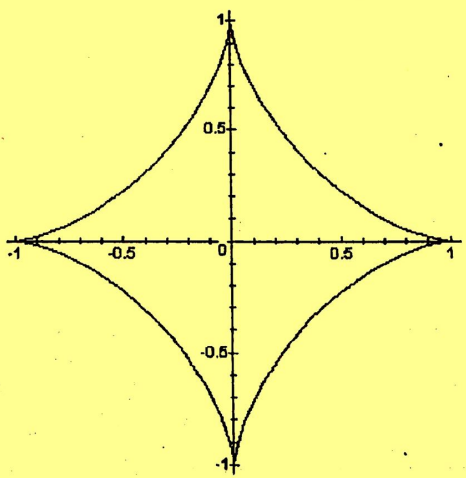
în prealabil graficul în MapleV

```
> plot([t-sin(t),1-cos(t),t=0..2*Pi]);
```



V.2.2. Calculaţi lungimea *astroidei*: $x = a\cos^3 t$
$y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$;.

```
> plot([(cos^3)(t),(sin^3)(t),t=0..2*Pi]);
```



Ind. Tinând seama de simetria figurii, calculăm

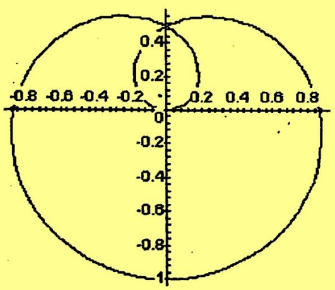
$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}\, dt = 6a$$

V.2.3. Calculaţi lungimea totală a drumului a cărui ecuaţie în coordonate polare este : $r = a.\sin\frac{t}{3}, t \in [0,3\pi]$

Ind. ecuaţiile parametrice ale drumului sunt: $x = a.\sin\frac{t}{3}.\cos t$

$$y = a.\sin\frac{t}{3}.\sin t, \quad t \in [0,3\pi]$$

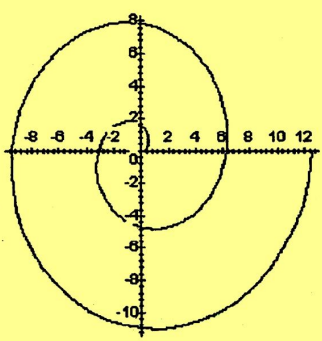
➢ **plot([sin(t/3)*cos(t),sin(t/3)*sin(t),t=0..3*Pi]);**



şi astfel $L = \frac{3\pi.a}{2}$.

V.2.4. Calculaţi lungimea drumului a cărui ecuaţie în coordonate polare este : $r = at$, $t \in [0,4\pi]$, (*spirala lui Arhimede*).

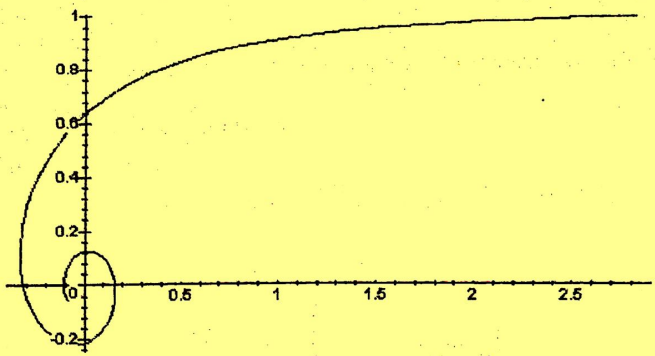
➢ **plot([t*cos(t),t*sin(t),t=0..4*Pi]);**



V.2.5. Calculaţi lungimea drumului a cărui ecuaţie în coordonate polare este : $r = \frac{a}{t}$, $t \in [\frac{1}{2},6]$, (*spirala hiperbolică*)

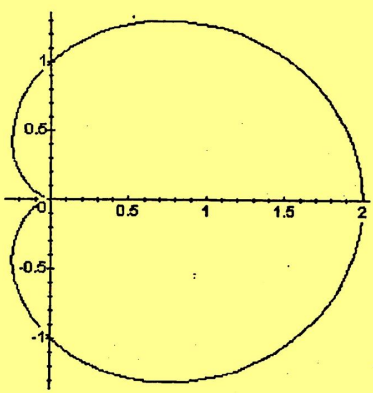
Scanned with OKEN Scanner

```
> plot([(1/t)*cos(t),(1/t)*sin(t),t=1/3..10]);
```



V.2.6. Calculați lungimea *cardioidei*, a cărei ecuație în coordonate polare este $r = a(1+\cos t), t \in [0,2\pi]$,

```
>plot([(1+cos(t))*cos(t),(1+cos(t))*sin(t),t=-Pi..Pi]);
```



V.2.7. Calculați lungimea *lemniscatei lui Bernoulli* , a cărei ecuație în coordonate carteziene este

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Ind. Scriem ecuația în coordonate polare:

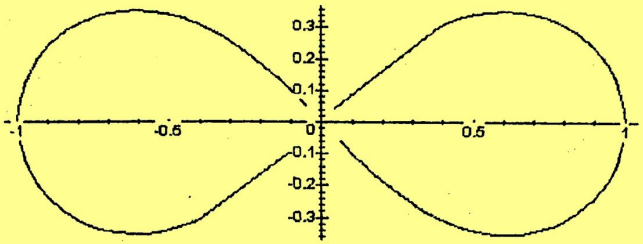
$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$$

și astfel ecuațiile parametrice ale lemniscatei sunt:

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\cos\varphi\ ,\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\sin\varphi\ ,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}];$$

Scanned with OKEN Scanner

➢ **plot([sqrt(cos(2*t))*cos(t),sqrt(cos(2*t))*sin(t),t=0..2*Pi]);**



din simetria graficului în raport cu axa Oy, rezultă că este suficient calculul lungimii buclei din dreapta.

V.2.8. Calculați lungimea drumului, a cărui ecuație în coordonate carteziene este:

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$

Ind. Considerăm $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$;

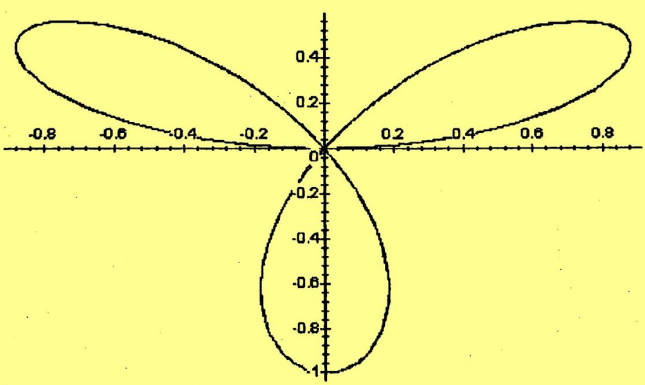
obținem $L=4\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

V.2.9. Scrieți ecuațiile parametrice și desenați în Maple următoarele curbe, a căror ecuații în coordonate polare sunt:

a) $r=a\sin 3t$, (*rozariu cu trei bucle*)

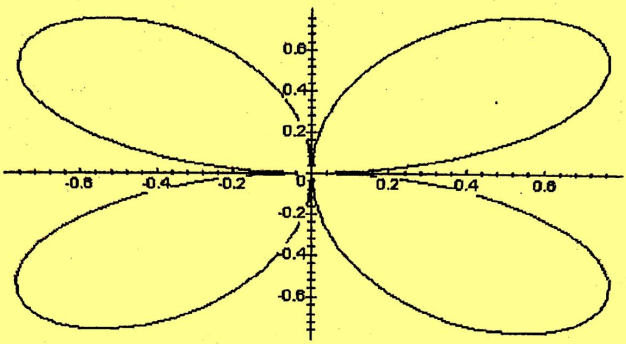
b) $r=a\sin 2t$, (*rozariu cu patru bucle*)

> plot([sin(3*t)*cos(t),sin(3*t)*sin(t),t=-Pi..Pi]);



Scanned with OKEN Scanner

```
> plot([sin(2*t)*cos(t),sin(2*t)*sin(t),t=-Pi..Pi]);
```



V.2.8. Calculați lungimea drumului, a cărui ecuație în coordonate carteziene este:

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$

Ind. Considerăm $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t, t\in[0,2\pi]$;

obținem $L=4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

V.2.9. Calculați lungimea drumurilor, ale căror ecuații parametrice sunt:

1) $x=a\cos t$
$y=a\sin t$
$z=a\ln\cos t,\ t\in[0,\frac{\pi}{4}]$

2) $x=e^t\cos t$
$y=e^t\sin t$
$z=e^t,\ t\in[0,\pi]$

R. $L_1=a\ln(1+\sqrt{2});\ L_2=\sqrt{3}(e^{\pi}-1)$.

V.2.10. Calculați lungimea drumului definit prin:

$$y=a\arcsin\frac{x}{a},\ z=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x}$$

de la origine până la punctul $\left(\frac{a}{2},\frac{a\pi}{6},\frac{a}{4}\ln 3\right)$.

R. $L=\frac{a}{2}(1+\frac{\ln 3}{2})$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

VI.I. FUNCTII REALE DE MAI MULTE VARIABILE REALE

VI.1. *Limita şi continuitatea unei funcţii într-un punct*

VI.1.1 Stabiliţi domeniile de definiţie ale următoarelor funcţii:

a) $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; b) $f(x,y)=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$; c) $f(x,y)=\ln xy$;

d) $f(x,y)=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\arccos(x^2+y^2)$; e) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$;

f) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$, $0<r<R$.

R. a) $\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$; b) $\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2; x^2+y^2\neq R^2\}$;
c) $\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2; xy>0\}$; d) $\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2; x^2+y^2\le 1\}$;e)$\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3; x>0, y>0, z>0\}$;
f) $\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3; r^2<x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

VI.1.2 Domeniul de definiţie al unei funcţii f este mărginit de dreptele $y=0$, $y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x-1$.(frontiera fiind exclusă). Descrieţi domeniul cu ajutorul inegalităţilor.

R $0<y<2; 2y<x<2y+2$

VI.1.3 Domeniul de definiţie al unei funcţii f este mărginit de parabolele $y=x^2$ şi $x=y^2$ (incluzând şi frontiera). Descrieţi domeniul prin inegalităţi.

R. $0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}$.

VI.1.4 Domeniul de definiţie al unei funcţii este mărginit de sfera de centru (a,b,c) şi rază R (incluzând şi frontiera). Descrieţi-l cu ajutorul inegalităţilor.

R. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$.

VI.1.5. Folosind definiţia, să se demonstreze că : $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x}{y}=1$;

Ind. a) Fie $\varepsilon>0$; evaluând $\left|\frac{x}{y}-1\right|\le\frac{1}{|y|}\cdot(|x-2|+|y-2|)$ obţinem existenţă unui $\delta\in(0,\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\})$ astfel încât $|x-2|<\delta$ şi $|y-2|<\delta$ ceea ce implică $\frac{1}{|y|}<1$

Scanned with OKEN Scanner

şi respectiv $\left|\frac{x}{y}-1\right|<\varepsilon$.

VI.1.6. Argumentaţi afirmaţia : nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ind. Luând şiruri $\left(\frac{1}{n},\frac{\lambda}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}(0,0)$, λ parametru real, avem $f\left(\frac{1}{n},\frac{\lambda}{n}\right)=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$; aceasta limită depinzând de λ, conform propoziţiei III.1.1, nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

VI.1.5. Arătaţi că următoarele funcţii nu au limită în origine:

a) $f: \boldsymbol{R}^2\setminus\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2; y^2=2x\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$

b) $g:\boldsymbol{R}^2\setminus(0,0)\to\boldsymbol{R}$, $g(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$;

c) $h:\boldsymbol{R}^2\setminus(0,0)\to\boldsymbol{R}$, $h(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

Ind. Aplicăm propoziţia IV.4.1, folosind şirurile: a) $\left(\frac{1}{n^2},\frac{\lambda}{n}\right)_n$; b) $\left(\frac{1}{n},\frac{\lambda}{n}\right)_n$; c) $\left(\frac{1}{n},\frac{\lambda}{n}\right)_n$.

VI.1.6 Calculaţi următoarele limite:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Ind. a), b) se amplifică cu conjugata şi astfel :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$, $\left(0\le\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{|xy|}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$

$\left(\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}=\frac{(|x|+|y|).(x^2+y^2-|x.y|)}{x^2+y^2}\le|x|+|y|\right)$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=1$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = +\infty$, deoarece $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \geq \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

VI.1.7. Fie $f: \boldsymbol{R}^2 \setminus (0,0) \to \boldsymbol{R}$ definită prin $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; verificaţi că f are limită în origine după orice direcţie, dar nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

VI.1.8. Studiaţi continuitatea în origine a următoarelor funcţii:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$; b) $f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, x>0 si y>0 \\ 1, x=0 sau\ y=0 \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2).\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$; d) $f(x,y) = \begin{cases} y^2.\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$.

Ind. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\sin^2\dfrac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2} = 0$, (rezolvare asemănătoare cu cea a problemei VI.1.6.c)); b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} =$

$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = = 1$ (în calcul, folosim inegalitatea: $0 \leq \dfrac{\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} . \sqrt[4]{(xy)^3} \leq \dfrac{\sqrt[4]{(xy)^3}}{2}$);

c) $0 \leq (x^2+y^2)\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leq (x^2+y^2)$: d) folosim inegalitatea

$$0 \leq y^2.\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = 2y^2.\ln\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} < 2y^2.\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = 2|y|.\sqrt{x^2+y^2}.$$

VI.2. *Derivate parţiale, diferenţiala unei funcţii într-un punct.*

VI.2.1. Se consideră funcţia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ şi punctul (1,2,3); să se calculeze $\dfrac{df}{ds}(1,2,3)$ unde $s = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ind. Folosim formula $\dfrac{df}{ds}(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \dfrac{f(a+ts)-f(a)}{t}$, unde $a = (1,2,3)$;

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{df}{ds}(1,2,3)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(1+t/\sqrt{2},2,3-t/\sqrt{2})-f(1,2,3)}{t}=-4\sqrt{2}.$$

VI.2.2 Care sunt versorii s, astfel încât pentru funcţia $f(x,y)=\sqrt[4]{xy^2}$ să existe $\frac{df}{ds}(0,0)$?

Ind. Fie $s=(s_1, s_2)$ un versor din $\boldsymbol{R}^2$; există $\frac{df}{ds}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{t^3 s_1 s_2^2}}{t}$ dacă $s_1\neq 0$ sau $s_2=0$.

VI.2.3. Fie $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, definită prin $f(x,y)=\begin{cases}1, & y>0,\ x^2/2<y<x^2\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$. Verificaţi că f este derivabilă după orice versor în (0,0), cu toate că funcţia nu este continuă în origine.

VI.2.4. Calculaţi cu ajutorul definiţiei $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ dacă $f(x,y)=e^{\cos xy}$.

Ind. $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,\pi/2)-f(1,\pi/2)}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$

VI.2.5. Folosind formulele obişnuite, să se calculeze derivatele parţiale în raport cu toate variabilele care intervin, pentru funcţiile următoare:

a) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; b) $f(x,y)=arctg\sqrt{x^y}$

c) $f(x,y)=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\frac{x+y}{xy}$; d) $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$

R. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$;

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$;

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

VI.2.6. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, dacă $f(x,y)=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(\cos y + y\sin x)(1+\sin x+\sin y)-\cos x(x\cos y - y\cos x)}{(1+\sin x+\sin y)^2}$, şi atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$.

VI.2.7. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,\frac{\pi}{4})$, dacă $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$

R. $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

VI.2.8. Să se arate că funcţia $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea $|f(x_1,...,x_n)| \le \|x\|^2$ admite derivate parţiale de ordinul I în origine.

Ind. Din ipoteză avem $-(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2) \le f(x_1,...,x_n) \le x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$, rezultând $f(0,...,0)=0$ şi $-x_k \le \frac{f(0,...,0,x_k,0,...0)-f(0,...,0)}{x_k} \le x_k$; obţinem astfel $\frac{\partial f}{\partial x_k}(0,...,0)=0$, $1\le k\le n$

VI.2.9. Studiaţi diferenţiabilitatea în origine a următoarelor funcţii:

a) $f(x,y)=\begin{cases}0, x=0 sau y=0\\ 1, x\neq 0 si y\neq 0\end{cases}$; b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$; d) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$;

e) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), y\neq 0\\ 0, y=0\end{cases}$.

Ind. a) funcţia nu este continuă în origine ($\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 1$ dar $\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n},0\right)\to 0$), deci nu este diferenţiabilă în origine; b) funcţia nu este diferenţiabilă în origine deoarece nu admite derivate parţiale (avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1$ în timp ce $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=-1$);

c) funcţia este continuă în origine ($0<\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}<\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}$ implică $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$); derivatele parţiale în origine se calculează pornind de la definiţie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; dacă f ar fi diferenţiabilă în origine avem

Scanned with OKEN Scanner

egalitatea: $f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)+\sqrt{x^2+y^2}\cdot\varphi(x,y)$,

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$; din egalitate rezultă că $\varphi(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ şi astfel nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)$, deci funcţia nu este diferenţiabilă în origine; d) funcţia este continuă în origine, are derivate parţiale în origine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ şi este diferenţiabilă în origine deoarece avem: $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x,y)$

cu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$; merită reţinut că derivatele parţiale nu sunt continue în origine; e) funcţia este continuă în origine deoarece ($0<y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)<2y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}$), are derivate parţiale în origine şi anume $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; cum $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)=0$ funcţia este diferenţiabilă în origine.

VI.2.10. Determinaţi $z(x,y)$ în următoarele cazuri: a) $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2.y^2}}$; c) $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$; d) $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3+y^3}{y}$, dacă $z(x,1)=\cos x$.

Ind. a) $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi(y)$; b) $z(x,y)=\frac{1}{x}\arcsin x.y+\varphi(x)$;

c) $z(x,y)=arctg\frac{y}{x}+\varphi(x)$; d) $z(x,y)=x^3\ln y+\frac{y^3}{3}+\varphi(x)$ şi din condiţia iniţială avem $\varphi(x)=\cos x-\frac{1}{3}$.

VI.2.11. Folosind aproximarea liniară a unei funcţii diferenţiabile, calculaţi cu aproximaţie: a) $(0.97)^2.(1.02)^3.(2.01)^4$; b) $\sin 31^\circ.\ tg46^\circ.\cos 59^\circ$.

Ind. a) considerăm $f(x,y,z)=x^2.y^3.z^4$, fiind diferenţiabilă în (1,1,1) folosim formula : $f(0.97,1.02,2.01)\approx f(1,1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1).(1\text{-}0.97)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1).(1\text{-}1.02)+$ $+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1).(1\text{-}2.01)$; b) funcţia $f(x,y,z)=\sin x.tgy.\cos z$ este diferenţiabilă în $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$, folosim aceeaşi formulă fiind atenţi la transformarea gradelor în radiani.

Scanned with OKEN Scanner

VI.2.12. Calculaţi $df_1(1,1)$ pentru $f_1(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$, $df_2(1,1,1)$ pentru $f_2(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi $df_3(1,1,1)$ respectiv $df_3(0,0,0)$ pentru $f_3(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$

R. $df_1(1,1)=\sqrt{2}(dx+dy)$; $df_2(1,1,1)=\frac{1}{3}(dx+dy+dz)$;

$df_3(1,1,1)=4(dx+dy+3dz)$; $df_3(0,0,0)=\mathcal{O}$.

VI.2.13. Determinaţi diferenţiala în punctul curent pentru următoarele funcţii:

$f_1(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y)\neq(0,0)$;

$f_2(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$, $\left|\frac{x}{y}\right|\leq 1$;

$f_3(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$;

$f_4(x,y,z)=x^{y.z}$, $x>0, y>0, z>0$.

R. $df_1(x,y)=\frac{x.dx+y.dy}{x^2+y^2}$; $df_2(x,y)=\frac{y.dx-x.dy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$; $df_3(x,y)=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$;

$df_4(x,y,z)=y.z.x^{y.z-1}dx+z.x^{yz}\ln x.dy+yx^{yz}\ln x.dz$.

VI.2.14. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul I aale următoarelor funcţii compuse: a) $f(x,y)=\varphi(x^2y+xy^2)$; b) $f(x,y)=x.y+x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;

c) $f(x,y,z)=\varphi(x.y.z)+\psi(x^2+y^2+z^2)$. (se consideră că φ şi ψ sunt funcţii derivabile)

Ind. a) notăm $u(x,y)=x^2y+xy^2$ şi folosim formulele $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=$

$=\varphi'(u).\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2xy\varphi'(u)$, respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi'(u).\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=2xy\varphi'(u)$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y+\varphi(u)-\frac{y}{x}\varphi'(u)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+\varphi(u)$, unde $u(x,y)=\frac{y}{x}$;

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz\varphi'(u)+2x\psi'(v)$, unde $u(x,y,z)=x.y.z$ şi $v(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x.z\varphi'(u)+2y\psi'(v)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=x.y\varphi'(u)+2z\psi'(v)$.

VI.2.15. Arătaţi că funcţia $z(x,y)=y.f(x^2-y^2)$, unde f este funcţie derivabilă verifică ecuaţia:

$$\frac{1}{x}.\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.2.16. Calculaţi diferenţiala în punctul curent a funcţiei $z(x,y)=x.y+x.\varphi(\frac{x}{y})$.

(se consideră că φ este funcţie derivabilă)

VI.2.17. Arătaţi că dacă $\varpi=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ unde $x=r\sin u\cos v$, $y=r\sin u\sin v$, $z=r\sin u$, (Φ funcţie derivabilă), atunci $\frac{\partial \omega}{\partial u}=0$, $\frac{\partial \omega}{\partial u}=0$.

Ind. $\varpi=\Phi(x^2+y^2+z^2)=\Phi(r^2)$.

VI.2.18. Pornind de la definiţie să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$ dacă

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

VI.2.19. Pornind de la definiţie, să se arate că pentru $f(x,y)=xy\ln x$, definită pe $(0,\infty)\times R$, avem egalitatea $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$.

VI.2.20. Fie $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; arătaţi că $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

VI.2.21. Determinaţi valoarea constantei reale a pentru care funcţia $u=x^3+axy^2$ satisface ecuaţia $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

R. $a=-3$

VI.2.22. Calculaţi $d^2f(1,1)$ pentru $f(x,y)=x^2+xy+y^2.+4\ln x-10\ln y$ şi $d^2f(0,0,0)$ pentru $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$

R. $d^2f(1,1)=2(-dx^2+dxdy+6dy^2)$;

$d^2f(0,0,0)=2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$.

VI.2.23. Calculaţi $z(x,y)$ dacă a)$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$; b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$; c) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$.

Ind. a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\varphi(y)\Rightarrow z(x,y)=\Phi(y)+\psi(x)$, unde $\Phi'(y)=\varphi(y)$; c) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=2y+\varphi(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow z(x,y)=y^2+y\varphi(x)+\psi(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.2.24. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţia $f(x,y)=$ $=x.\varphi(x^2+y^2)$, unde φ este o funcţie de clasă C^2.

R. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x.\varphi'(x^2+y^2)+4x^3\varphi''(x^2+y^2)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)=2y\varphi'(x^2+y^2)+4x^2y\varphi''(x^2+y^2)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=2x\varphi'(x^2+y^2)+4xy^2\varphi''(x^2+y^2)$

VI.2.25. Fie $u(x,y)=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$, unde φ şi ψ sunt funcţii de clasă C^2.; arătaţi că $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}.\frac{\partial}{\partial y}(y^2.\frac{\partial u}{\partial y})$.

VI.2.26. Fie $u(x,y,z)=e^{x,y,z}$; arătaţi că: $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u$

VI.2.27. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea pentru următoarele funcţii în punctele indicate : a) $f_1(x,y)=e^x\sin y$ în (0,0); b) $f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ în (1,1)

Ind. a) $T_3(x,y)=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3$;

b) $T_3(x,y)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2)+\frac{1}{2!.2\sqrt{2}}[(x-1)^2+2(x-1).(y-1)+(y-1)^2]$ -

$\frac{1}{2!.4\sqrt{2}}[(x-1)^3+(x-1)^2.(y-1)+ +(x-1).(y-1)^2+(y-1)^3]$.

VI.2.28. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea pentru funcţia $f(x,y)=x^y$, $x>0, y>0$ şi să se deducă valoarea aproximativă pentru (1.1,1.2).

Ind. $T_3(x,y)=1+(x-1)+(x-1).(y-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2(y-1)$; punem $x=1.1$, $y=$ 1.2, atunci $(1.1)^{1.2}\approx 1.1021$.

VI.2.29. Calculaţi extremele următoarelor funcţii:

a) $f_1(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$; b) $f_2(x,y)=x^4+y^4+4xy-2x^2-2y^2$;

c) $f_3(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$; d) $f_4(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{a^2}{x}+\frac{a^2}{y}$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. a) Calculăm mai întâi punctele critice ca soluții ale sistemului : $\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \end{cases}$, adică $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ soluția sistemului este $x = 1, y = 0$. Scriem hessiana funcției în (1,0): $H_{f_1}(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cu regula lui Sylvester obținem că funcția are un minim în (1,0), valoarea minimului fiind $f_1(1,0) = -1$; b)funcția are un minim în punctele $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ și $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, în plus $f_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$; punctul (0,0) nu este punct de extrem; c) f_3 are minim în $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ și $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, valoarea minimului fiind în ambele cazuri $-\frac{1}{2e}$; f_3 are maxim în $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ și $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, valoarea maximului fiind în ambele cazuri $\frac{1}{2e}$; d) f_4 are un minim în punctul $(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}})$.

VI.2.30. Calculați extremele următoarelor funcții:

a) $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

b) $f_2(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x > 0, y > 0, z > 0$;

c) $f_3(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{4}, x > 0, y > 0, z > 0$;

d) $f_4(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$

Ind. a) Calculăm mai întâi punctele critice, ca soluții ale sistemului :

$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \end{cases}$, adică: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases}$, obținând punctul critic $(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 1)$; hessiana în acest

Scanned with OKEN Scanner

punct este $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cu regula lui Sylvester obținem că funcția are un minim în $(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 1)$; b) f_2 are un minim în $(\frac{1}{2}, 1, 1)$; c) punctul (2,4,8) este un punct de minim pentru f_3; d) (0,0,0) este un punct de minim pentru f_4.

VI.2.31. Să se arate că funcția $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^{-y}$ are o infinitate de maxime şi nici un minim.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

VII. FUNCTII REALE DE MAI MULTE VARIABILE REALE

VII.1. *Funcţii vectoriale de mai multe variabile reale*

VII.1.1. Să se expliciteze $g \circ f$ în următoarele cazuri:

a) $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, $f(x,y) = (x+1, x^2y, x+y)$,
$g: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $g(x,y,z) = x+y-2z$;

b) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$, $f(x) = (2x+1, x)$
$g: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, $g(x,y) = (x^2y, 1, x-y)$.

Ind. a) $g(f(x,y)) = g(x+1, x^2y, x+y) = x^2y - x - 2y + 1$

b) $g(f(x)) = g(2x+1, x) = (x(2x+1)^2, 1, x+1)$.

VII.1.2. Să se expliciteze matricea jacobiană J_f în punctul curent pentru fiecare din funcţiile următoare:

a) $F(x,y) = (x^2y, xy^2)$; b) $F(x,y) = (x+y, xy, \sin x + \cos y)$;

c) $F(x,y,z) = (e^{x+y}, e^{x-y})$; d) $F(x,y,z) = (xyz, x+y+z, x^2y^2z^2)$

R. a) $J_F = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$; b) $J_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ \cos x - \sin y & \end{pmatrix}$;

c) $J_F = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$; d) $J_F = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z \end{pmatrix}$.

VII.1.3. Calculaţi jacobianul lui F în punctul curent, pentru următoarele funcţii:

a) $F(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$; b) $F(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi; r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

R. a) $\det J_F = r$; b) $\det J_F = r^2\sin\theta$.

VII.2. *Teorema funcţiilor implicite*

VII.2.1. Calculaţi derivatele de ordinul întâi ale următoarelor funcţii (y' sau $\frac{dy}{dx}$) definite implicit:

a) $xy - \ln y = a$; b) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$; c) $arctg\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$; d) $y^x = x^y$.

Ind. a) Considerăm $F(x,y) = xy - \ln y - a$ şi calculăm $\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{y}$; dacă $x - \frac{1}{y} \neq 0$, aplicăm formula rezultată din teorema funcţiilor implicite (VII.2.2.) şi avem: $y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y}{x - \frac{1}{y}}$.

Altă metodă : derivăm relaţia dată ţinând seama că y este funcţie de x: $y + xy' - \frac{y'}{y} = 0$ şi pentru $x - \frac{1}{y} \neq 0$ obţinem $y' = \frac{y^2}{1-x}$; b) $y' = \frac{y}{x}\frac{2x + e^{xy} - \cos xy}{\cos xy - e^{xy} - x}$; c) $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$; d) $y' = \frac{y^2}{x^2}\frac{\ln x - 1}{\ln y - 1}$.

VII.2.2. Funcţia y este definită implicit de relaţia $1 + xy + \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$; calculaţi y' şi y''.

Ind. $y' = -\frac{y}{x}$; pentru calculul lui y'' derivăm y' ţinând seama că y este funcţie de x şi astfel: $y'' = \frac{2y}{x^2}$.

VII.2.3. Ecuaţia $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ defineşte implicit pe y ca funcţie de x; calculaţi y' pentru sistemul de valori $x = 6, y = 2$.

Ind. $y' = \frac{2-x}{y-5}$ şi astfel $y'(6) = 4/3$.

VII.2.4. Se dau ecuaţiile : a) $F_1(\sin x + y, \cos y + x) = 0$;

b) $F_2(x + 2y, y - 2x) = 1$,

care definesc în fiecare caz în parte pe y ca funcţie de x. în ipoteza că F_i, i=1,2, sunt funcţii de clasă C^1 pe $\boldsymbol{R^2}$, calculaţi y'.

Ind. a) Considerăm $\alpha(x,y) = \sin x + y$, $\beta(x,y) = \cos y + x$ şi derivăm F_1 In raport cu x, ţinând seama că α şi β sunt funcţii de x şi y, iar y este funcţie de x;

Scanned with OKEN Scanner

pentru $\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} - \sin y \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \neq 0$, obţinem: $y' = \frac{\cos x \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta}}{\sin y \frac{\partial F_1}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}}$; b) $y' = \frac{2\frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}}{2\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \beta}}$.

VII.2.5. Ecuaţiile următoare definesc implicit z ca funcţie de x,y:

a) $x^3 + xyz = a^3$; b) $e^z - xyz = 0$; c) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$;

calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z în fiecare caz.

Ind. a) Putem aplica direct formula din teorema funcţiilor implicite, considerând $F(x,y,z) = x^3 + xyz - a^3$; impunem condiţia $\frac{\partial F}{\partial z} = xy \neq 0$ şi atunci :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2 + yz}{xy} \text{ respectiv } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z}{y}.$$

Acelaşi rezultat se obţine derivând relaţia ce defineşte implicit pe $z(x,y)$ în raport cu x, respectiv cu y, ţinând seama că z este funcţie de x,y: $3x^2 + yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, respectiv $xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, ecuaţii din care obţinem $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(x-1)}$;

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$.

VII.2.6. z este funcţie de variabilele x şi y definită implicit de ecuaţia

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z - 8 = 0.$$

Calculaţi dz şi d^2z pentru sistemul de valori $x = 2, y = 0, z = 1$.

R. $dz(2,0) = 0$, $d^2z(2,0) = \frac{4}{15}(dx^2 + dy^2)$.

VII.2.7. Arătaţi că funcţia z definită implicit de relaţia $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, unde φ este funcţie de clasă C^1 satisface ecuaţia $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$

VII.2.8. Relaţia $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, unde F este funcţie diferenţiabilă defineşte $z(x,y)$. Arătaţi că $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

VII.2.9. Fie $z = \varphi(x,y)$, unde φ este o funcţie de clasă C^1 pe $D \subset \mathbf{R}^2$ iar y este o funcţie definită implicit de relaţia $\psi(x,y) = 0$ (ψ este o funcţie de clasă C^1 pe $D \subset \mathbf{R}^2$); calculaţi z'.

Scanned with OKEN Scanner

VII.2.10. Fiind dată relaţia $F(x,y,z) = 0$, unde F este funcţie de clasă C^1, demonstraţi că: a) $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 1$; b) $\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = -1$.

Ind. a) considerăm că relaţia dată defineşte x ca funcţie de y şi z, deci $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$, respectiv defineşte y ca funcţie de x şi z, aşadar $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; b) procedăm analog considerând y ca funcţie de x şi z, apoi z ca funcţie de x şi y şi în fine x ca funcţie de y şi z.

VII.2.11. Funcţiile y şi z de variabilă x sunt definite implicit de sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=4 \end{cases}$. Calculaţi y', y'', z', z''..

Ind. Considerăm $f=(f_1,f_2)$ unde f_i: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $f_2(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-4$; impunem condiţia $\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & -2z \\ 4y & 6z \end{vmatrix} = 20yz \neq 0$ şi aplicăm formula din teorema funcţiilor implicite: $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & -2z \\ 4y & 6z \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}$, astfel $y' = -\frac{4}{5}\frac{x}{y}$, $z' = \frac{1}{5}\frac{x}{z}$. Putem calcula y', z' derivând sistemul în raport cu x, ţinând seama că y şi z sunt funcţii de x, adică $\begin{cases} 2x+2yy'-2zz'=0 \\ x+4yy'+6zz'=0 \end{cases}$; rezolvăm acest sistem de necunoscute y', z' (determinantul sistemului este $20yz \neq 0$).

In plus $y'' = -\frac{4}{5}\frac{y-xy'}{y^2} = -\frac{4}{5}\frac{5y^2+4x^2}{y^3}$.

VII.2.12. Sistemul $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+u^2=1 \\ xy^2+yz^2+zu^2=2 \\ \ln(x^2+y^2)+e^{z^2+u^2}=3 \end{cases}$ defineşte y,z,u ca funcţii de x; calculaţi y', z', u'.

VII.2.13. Se dă sistemul $\begin{cases} F(x+y-t, x^2+y^2-t^2)=x \\ x^4+y^4+t^4=1 \end{cases}$, unde F este de clasă C^1, defineşte x şi y ca funcţii de t; calculaţi x', y'.

Scanned with OKEN Scanner

VII.2.14. Funcţiile u şi v sunt definite implicit de relaţiile : $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}$; calculaţi derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Ind. Avem $f = (f_1, f_2)$ unde $f_i : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x,y,u,v) = x - u\cos v$

$$f_2(x,y,u,v) = y - u\sin v$$

impunem condiţia $\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\cos v & u\sin v \\ -\sin v & -u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0$ şi aplicăm formula din teorema funcţiilor implicite:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Putem însă deriva direct cele două relaţii, în funcţie de x respectiv de y, considerând u şi v funcţii de x şi y

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos v - \frac{\partial v}{\partial x} u\sin v \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\sin v + \frac{\partial v}{\partial x} u\cos v \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos v - \frac{\partial v}{\partial y} u\sin v \\ 1 = \frac{\partial u}{\partial y}\sin v + \frac{\partial v}{\partial y} u\cos v \end{cases};$$

prin rezolvarea sistemelor (observaţi că au acelaşi determinant, care este determinantul funcţional calculat anterior) obţinem derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

VII.2.15. Sistemul $\begin{cases} F(x+y+z, xy+zu) = 1 \\ G(x+y+z, xz+y^2+u^2) = 2 \end{cases}$, unde F, G sunt de clasă C^1 pe $D \subset \boldsymbol{R}^4$ defineşte pe z şi u ca funcţii de x şi y; calculaţi du şi dz (în punctul curent).

Ind. Reamintim că $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ şi $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$; notând

$$\alpha(x,y,z,u) = x+y+z,\ \beta(x,y,z,u) = xy+zu,\ \gamma(x,y,z,u) = xz+y^2+u^2$$

scriem formula de calcul a derivatelor parţiale (din teorema funcţiilor implicite), după ce am impus ca $\frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}.u & \frac{\partial F}{\partial \beta}.z \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}+\frac{\partial G}{\partial \gamma}.x & \frac{\partial G}{\partial \gamma}2u \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}y & \frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}.x \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}+\frac{\partial G}{\partial \gamma}z & \frac{\partial G}{\partial \alpha}+\frac{\partial G}{\partial \gamma}2y \end{pmatrix}.$$

VII.2.16. Din sistemul $\begin{cases} F(x-y+z+u, x^2+y^2-z^2-u)=1 \\ y\sin x+zu=2 \end{cases}$, unde F este de clasă C^1 pe $D \subset \boldsymbol{R}^4$, calculaţi du şi dz (în punctul curent).

VII.2.17. u şi v sunt funcţii definite implicit de relaţiile: $uv = 3x-2y+z$, $v^2=x^2+y^2+z^2$; arătaţi că $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

VII.2.18. r, φ, θ sunt funcţii de x,y,z definite implicit de sistemul:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta;$$

calculaţi $dr, d\varphi, d\theta$.

VII.2.19. Fie dat un sistem de n ecuaţii cu $2n$ necunoscute:

$$F_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)=0,\ 1\le i\le n$$

cu proprietatea că funcţiile F_i, $1\le i\le n$, sunt de clasă C^1 şi $\frac{D(F_1,...F_n)}{D(y_1,...,y_n)}\neq 0$; demonstraţi că $\frac{D(y_1,...y_n)}{D(x_1,...,x_n)}=\frac{1}{\frac{D(x_1,...,x_n)}{D(y_1,...,y_n)}}$.

Ind. Deoarece $\frac{D(F_1,...F_n)}{D(y_1,...,y_n)}\neq 0$ putem aplica teorema funcţiilor implicite, considerând $y_1,...,y_n$ ca funcţii de $x_1,...,x_n$; derivând sistemul în raport cu fiecare x_j obţinem: $-\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+...+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$, $1\le i,j\le n.$, relaţii ce pot fi scrise:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Rezultă astfel: $\frac{D(y_1,...y_n)}{D(x_1,...,x_n)} = -\frac{\frac{D(F_1,...,F_n)}{D(x_1,...,x_n)}}{\frac{D(F_1,...,F_n)}{D(y_1,...,y_n)}}$.

Considerând că ecuaţiile din enunţ definesc implicit $x_1,...,x_n$, ca funcţii de $y_1,...,y_n$, rezultă $\frac{D(x_1,...x_n)}{D(y_1,...,y_n)} = -\frac{\frac{D(F_1,...,F_n)}{D(y_1,...,y_n)}}{\frac{D(F_1,...,F_n)}{D(x_1,...,x_n)}}$.

VII.2.20. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II ale funcţiei $z(x,y)$, dacă : $x = \sin u.\cos v$, $y = \sin u.\sin v$, $z = \cos u$.

Ind. $\frac{\partial z}{\partial x} = -c\sin u\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -c\sin u\frac{\partial u}{\partial y}$; ţinem seama că u şi v sunt functii definite implicit de relaţiile $x = \sin u.\cos v$, $y = \sin u.\sin v$.

VII.2.21. Calculaţi dz dacă $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = uv$.

VII.2.22. Fie $y = f(x,t)$ şi $F(x,y,t) = 0$, unde f, F sunt funcţii de clasă C^1; verificaţi că : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}$.

Ind. y şi t sunt funcţii de x definite implicit de relaţiile din enunţ, pe care le vom deriva în raport cu x, obţinând: $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}$, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0$; rezolvăm sistemului de necunoscute $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dt}$

VII.2.23. Fie $f(x,y,z) = 0$ şi $F(x,y,z) = 0$, unde f, F sunt funcţii de clasă C^1; verificaţi că : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}$.

Scanned with OKEN Scanner

VII.2.24. Să se studieze extremele funcţiilor de două variabile $z = z(x, y)$, definite implicit de ecuaţiile:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$;

b) $x^2 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$;

c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.

Ind. a) prin derivarea în raport cu x, respectiv cu y a ecuaţiei obţinem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{3-z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y+2}{3-z}$ şi astfel punctele staţionare sunt $x = 1, y = -2$; scriem hessiana şi din că în $x = 1$, regula lui Sylvester obţinem $y = -2$ una din funcţiile definite de ecuaţia dată are un un maxim $z_{max} = 8$, iar cealaltă are un minim $z_{min} = -2$; b) în $x = -1$, $y = 2$, avem un maxim pentru una din funcţii $z_{max} = -2$ şi un minim pentru cealaltă $z_{min} = 1$.

c) In $(0,0)$, $z = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$ este valoare maximă pentru una din funcţii, iar pentru cealaltă $z = -\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$ este valoarea minimă.

VII.2.25. Să se calculeze extremele funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2$ cu legătura $x + y = 1$.

Ind. Aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange, considerând funcţia: $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$. Rezolvăm sistemul $2x + \lambda = 0$, $2y + \lambda = 0$, $x + y = 1$; soluţia este $x = y = -\lambda/2$, $\lambda = -1$. Verificând dacă este punct de extrem pentru F, obţinem că $(1/2, 1/2)$ este un minim pentru funcţia dată, cu legătura $x + y = 1$.

VII.2.26. Să se calculeze extremele funcţiei $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ cu legătura $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

R. f are un minim în $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ şi un maxim în $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

VII.2.27. Calculaţi extremele funcţiei $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Ind. Construim funcţia $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ şi rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2 + 2\lambda z = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

Inlocuind $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{\lambda}$, $z=-\frac{1}{\lambda}$ în ultima ecuaţie obţinem $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ şi astfel pentru $\lambda=\frac{1}{2}$ avem (-1,2,-2), respectiv pentru $\lambda=-\frac{1}{2}$ avem (1,-2,2). Scriem hessiana funcţiei F:

$$H_F=\begin{pmatrix}2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda\end{pmatrix}$$

Cu regula lui Sylvester obţinem că (-1,2,-2) este minim, iar (1,-2,2). este maxim.

VII.2.28. Să se calculeze extremele funcţiei $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ pentru $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c>0$.

R. $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$ sunt puncte de maxim, $(0,0,c)$, $(0,0,-c)$ sunt puncte de minim.

VII.2.29. Calculaţi extremele funcţiei

$$f(x,y,z)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2,\ a>b>c>0,$$

cu legătura $x^2+y^2+z^2=1$.

Ind. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange cere construirea funcţiei

$$F(x,y,z)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

şi rezolvarea sistemului:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=x[(a^2+\lambda)-2a(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=y[(b^2+\lambda)-2b(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=z[(c^2+\lambda)-2c(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţiile sistemului sunt: (0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (-1,0,0), $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Verificăm care dintre aceste puncte sunt extreme pentru F.

VII.2.30. Să se determine aria elipsei de intersecţie a cilindrului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cu planul $Ax+By+Cz=0$.

Ind. Aria elipsei este $\pi\alpha\beta$ unde α şi β sunt semiaxele elipsei; din definiţie α şi β sunt valorile maximă respectiv minimă a distanţei $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Problema revine la a calcula extremele funcţiei $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ cu legăturile $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ şi $Ax+By+Cz=0$. Construim funcţia $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)+\mu(Ax+By+Cz)$. Rezolvăm sistemul: $2x+2x\frac{\lambda}{a^2}+\mu A=0$, $2y+2y\frac{\lambda}{b^2}+\mu B=0$, $2z+2z\frac{\lambda}{c^2}+\mu C=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $Ax+By+Cz=0$.

Inmulţind prima ecuaţie cu x, a doua cu y, a treia cu z şi adunându-le, obţinem: $2(x^2+y^2+z^2) + 2\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})+\mu(Ax+By+Cz)=0$, deci $x^2+y^2+z^2=-\lambda$. Astfel sistemul are soluţiile : $x=-\frac{\mu A}{2(1+\frac{\lambda}{a^2})}$, $y=-\frac{\mu B}{2(1+\frac{\lambda}{b^2})}$, $z=-\frac{\mu C}{2}$. Inlocuind în ultima ecuaţie obţinem $\frac{A^2}{(1+\frac{\lambda}{a^2})}+\frac{B^2}{(1+\frac{\lambda}{b^2})}+C^2=0$, de unde rezultă ecuaţia în λ

$$\frac{C^2}{a^2b^2}+\lambda(\frac{A^2+B^2}{b^2}+\frac{B^2+C^2}{a^2})+A^2+B^2+C^2=0 .$$

Deoarece $\alpha=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,|_{max}=\sqrt{-\lambda_1}$, $\beta=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,|_{min}=\sqrt{-\lambda_2}$ şi din ecuaţia în λ avem $\lambda_1.\lambda_2=\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}a^2b^2$, aria elipsei va fi $\pi\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C}ab$.

VII.2.31. Găsiţi dimensiunile unui corp cilindric, completat cu o semisferă de suprafaţă totală dată πa^2, astfel încât volumul sa fie maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Notând cu x raza cilindrului şi a semisferei şi cu y înălţimea cilindrului avem $\pi a^2 = 3\pi x^2 + 2\pi xy$; volumul este dat de funcţia $f(x,y) = \frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y$. Aşadar avem de determinat extremele funcţiei $f(x,y)$ cu legătura $\pi a^2 = 3\pi x^2 + 2\pi xy$; construim funcţia $F(x,y) = \frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y + \lambda(3\pi x^2 + 2\pi xy - \pi a^2)$ şi rezolvăm sistemul: $2\pi[x^2 + xy + \lambda(3x + +2y)] = 0$, $\pi(x^2 + 2\lambda x) = 0$, $3\pi x^2 + 2\pi xy = \pi a^2$, obţinând soluţiile $\lambda = -\frac{a}{2\sqrt{5}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calculăm hessiana lui F în $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ obţinând $H_F(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; observăm că regula lui Sylvester nu ne ajută. Din $d^2F(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{3\pi}{\sqrt{5}}dx^2$, rezultă că $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ este punct de maxim, volumul maxim fiind $\frac{\pi a^3}{3\sqrt{5}}$

VII.2.32. Calculaţi marginea inferioară respectiv superioară a funcţiei $f(x,y) = x^2 - y^2$ pe discul $x^2 + y^2 \le 4$.

Ind. Calculăm extremele în interiorul discului: rezolvăm sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ punctul (0,0) nu este punct de extrem , ceea ce se arată cu regula Sylvester. Pentru eventualele puncte de extrem de pe frontieră aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Definim $F(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ şi rezolvăm sistemul $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $x^2 + y^2 = 4$; obţinem că (2,0), (-2,0) sunt puncte în care f îşi atinge marginea superioară $\sup_{x^2+y^2 \le 4} f(x,y) = 4$ şi (0,2), (0,-2) sunt puncte în care care f îşi atinge marginea inferioară $\inf_{x^2+y^2 \le 4} f(x,y) = 4$.

VII.2.33. Găsiţi cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcţiei

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$$

In interiorul discului $x^2 + y^2 \le 4$.

R. $\sup_{x^2+y^2 \le 4} f(x,y) = f(0,0) = 0$, $\inf_{x^2+y^2 \le 4} f(x,y) = f(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$.

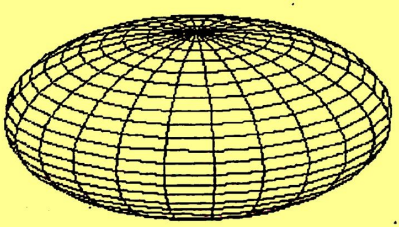
Scanned with OKEN Scanner

VII.3. *Suprafețe în spațiu*

VII.3.1 Scrieți ecuațiile parametrice ale suprafeței elipsoidului $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$; calculați versorul normalei la suprafața elipsoidului; desenați folosind programul Maple, această suprafață.

Ind. Ecuațiile parametrice sunt: $x=4\sin u.\cos v$, $y=3\sin u.\sin v$, $z=2\cos u$, $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$;

```
plot3d([4*(sin(u))*(cos(v)),3*(sin(u))*(sin(v)),2*cos(u)], u=0..Pi,v=0..2*Pi);
```



VII.3.2 Scrieți ecuațiile parametrice ale următoarelor suprafețe:

a) $x^2+y^2+z^2=x$;

b) $2z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$;

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $0\le z\le 1$;

d) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $0\le z\le 1$;

e) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=\frac{y^2}{4}$, $0\le y\le 2$

f) $z=\frac{1}{a}xy$, $a>0$, $x^2+y^2\le 1$

calculați versorul normalei la fiecare suprafață; desenați-le folosind programul Maple.

Ind. Ecuațiile parametrice sunt:

a) $x=\frac{1}{2}(1+\sin u.\cos v)$, $y=\frac{1}{2}\sin u.\sin v$, $z=\frac{1}{2}\cos u$, $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$;

b) $x=u, y=v, z=\frac{u^2+v^2}{2}$, $(u,v)\in\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2;\ u^2+v^2\le 2\}$;

c) $x=u, y=v, z=\sqrt{u^2+v^2}$, $(u,v)\in\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2;\ u^2+v^2\le 1\}$;

d) $x=u, y=v, z=1-\sqrt{u^2+v^2}$, $(u,v)\in\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2;\ u^2+v^2\le 1\}$;

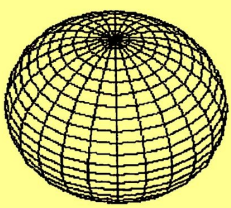
Scanned with OKEN Scanner

e) $x=u, z=v, y=2\sqrt{\frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{9}}$, $(u,v)\in\{\ (u,v)\in R^2;\ \frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{9}\le 1\}$;

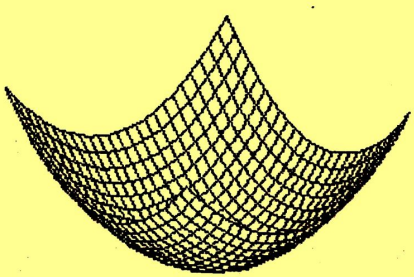
f) $x=u, y=v,\ z=\frac{1}{a}uv, u^2+v^2\le 1$

la scrierea versorului normalei trebuie remarcat că în cazul paraboloidului (b), şi al conului (c) normala face un unghi obtuz cu axa Oz, deci $\cos\gamma<0$, în schimb în cazul conului (d) normala face un unghi ascuţit cu axa Oz, deci $\cos\gamma>0$; e) avem $y=f(x,z)$ aşa că scriem ecuaţia normalei ţinând seama de acest aspect; desenele acestor suprafeţe sunt în anexa VII.3.2.

>plot3d([(1/2)*(1+sin(u)*cos(v)),(1/2)*sin(u)*sin(v),(1/2)*cos(u)],u=0..Pi,v=0..2*Pi);

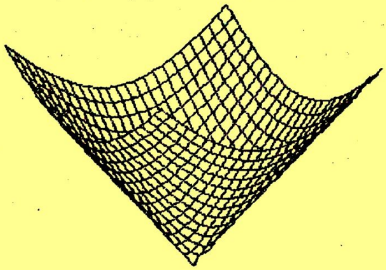


➢ **plot3d(x^2+y^2,x=-1..1,y=-1..1);**

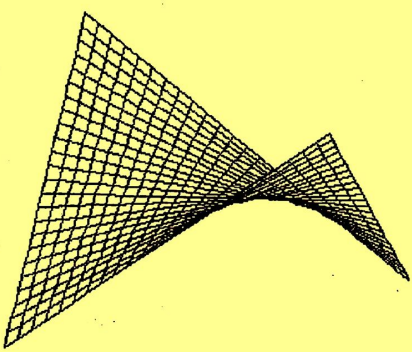


> plot3d(sqrt(x^2+y^2),x=-1..1,y=-1..1);

Scanned with OKEN Scanner



➢ **plot3d(x*y,x=-10..10,y=-10..10);**



VII.4. *Schimbări de variabile*

VII.4.1 Transformați ecuația $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ cu ajutorul noilor variabile independente $u = x$, $v = x^2 + y^2$ și apoi rezolvați-o.

R. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, atunci $z(u,v) = \varphi(v)$, adică $z(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$

VII.4.2 Transformați ecuația $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ cu ajutorul noilor variabile independente $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ și apoi rezolvați-o.

Scanned with OKEN Scanner

R. $u.\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$, atunci $z(x,y)=\varphi(\dfrac{y}{x})$.

VII.4.3 Transformați ecuația $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ cu ajutorul noilor variabile independente $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$.

R. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{2u}.\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

VII.4.4 In ce se transformă ecuația $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ dacă se face transformarea $x=u^2-v^2$, $y=u^2+v^2$?

R. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{4uv}(v\dfrac{\partial z}{\partial u}-u\dfrac{\partial z}{\partial v})$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{4uv}(v\dfrac{\partial z}{\partial u}+u\dfrac{\partial z}{\partial v})$, deci $\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.

VII.4.5 Transformați ecuația lui Laplace $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ trecând la coordonate polare ($x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$).

Ind. Din rezolvarea sistemului $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}.\cos\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}.(-r\sin\varphi)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\varphi,$$

obținem: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos\varphi.\dfrac{\partial z}{\partial r}-\dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ și $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin\varphi.\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Calculăm în detaliu una din derivatele parțiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\cos\varphi.\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi})=\cos\varphi.\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\varphi.\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi})-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\cos\varphi.\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi})=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi\partial r}+$$

$$+2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r}.\frac{\partial z}{\partial r}$$

Ecuația se transformă în: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}+\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial z}{\partial r}=0$.

VII.4.6 Să se calculeze pentru $z(x,y)$, funcție de clasă C^2 derivata de ordinul doi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în funcție de $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$,... dacă se face schimbarea de variabile $x=u.e^v$, $y=v.e^u$.

R. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{e^{-2v}}{(1-uv)^2}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{v^2e^{-2v}}{(1-uv)^2}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{ve^{-2v}}{(1-uv)^2}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(\dfrac{v^2e^{-2v}}{(1-uv)^2}-$

$\dfrac{ve^{-2v}(uv+u-1)}{(1-uv)^3})\dfrac{\partial z}{\partial u}+(\dfrac{-v^2e^{-2v}}{(1-uv)^2}+\dfrac{ve^{-2v}(uv-v+1)}{(1-uv)^3})\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Scanned with OKEN Scanner

VII.4.7 Transformaţi ecuaţia $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$ introducând noile variabile independente $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ şi noua funcţie $w = \ln z - x - y$.

Ind. Din $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - 1$ şi $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}.2x + \frac{\partial w}{\partial v}(-\frac{1}{x^2})$ obţinem că

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + 2xz\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}$$

Calculăm analog şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ şi în final ecuaţia devine $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

VII.4.8 Ce devine derivata parţială $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă se face transformarea:

$$u = x + z, v = y + z, w = x + y$$

cu $w(u,v)$ functie de clasă C^2?

Ind. Avem pe de o parte $\frac{\partial w}{\partial y} = 1$, pe de altă parte $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}(1 + \frac{\partial z}{\partial y})$, rezultând astfel $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$; analog deducem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$. Atunci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right).\left(1 + \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right).\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}.$$

I.4.9 Ce devine expresia $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ prin transformarea $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $z = \frac{u^2 - v^2}{4} - w$ cu $w(u,v)$ funcţie de clasă C^2 ?

Ind. Evaluăm $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ şi cu teorema funcţiilor implicite calculăm $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = x$; atunci $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{\frac{x}{2}[(u-v) - (\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v})]\} =$

$$= (u-v) - (\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}) + \frac{x}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}) - (\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2})x] = (u-v) - (\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}) -$$

$$- \frac{x^2}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}).$$

VII.4.10 Ce devine derivata parţială $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ prin transformarea $x = w$, $y = u + w$,

Scanned with OKEN Scanner

$z = v$ cu $w(u,v)$ functie de clasă C^2 ?

Ind. Derivând în raport cu x obţinem:

$1 = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$; observăm că $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ şi

avem $1 = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$, relaţie din care obţinem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}$.

Calculăm $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$

$$= \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} + \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\cdot\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Remarcă

In general, făcând cunoştinţă cu Maple V, eşti tentat să crezi că nu mai e nevoie să înveţi să calculezi, utilizarea corectă a instrucţiunilor, eliberându-te de coşmarul calculelor; (de fapt cursul de analiza matematică se numeşte în ţările anglo-saxone CALCULUS); am încercat, timid să arăt că în anumite probleme de grafică apar mici greşeli.

In cazul schimbărilor de variabilă, cititorul trebuie să-şi însuşească bine metodele de lucru, nu numai că are nevoie pentru rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, dar mai ales că ajutorul oferit de Maple este minim. Se pot transforma derivatele parţiale numai în cazul în care vechile variabile sunt date în funcţie de cele noi şi nu se acceptă decât un număr fixat de sisteme de coordonate (în R^3 sunt 30 şi R^2 sunt 15) care sunt importante şi poartă nume (le găsiţi în Help); de exemplu:

spherical:

x = u*cos(v)*sin(w), y = u*sin(v)*sin(w), z = u*cos(w)

paraboloidal:

x = u*v*cos(w), y = u*v*sin(w), z = (u^2 - v^2)/2

paracylindrical:

x = (u^2 - v^2)/2, y = u*v, z = w

parabolic:

x = (u^2-v^2)/2, y = u*v

polar:

x = u*cos(v), y = u*sin(v)

Pentru a transforma $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în coordonate polare ($z(x,y)$), dăm instrucţiunea:

```
> with(DEtools);
> PDEchangecoords(diff(z(x,y),x,x),[x,y],polar);
```

Pentru a transforma $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2}$ în coordonate sferice ($u(x,y,z)$), dăm instrucţiunea:

```
> with(DEtools);
> PDEchangecoords(diff(u(x,y),x,y,y),[x,y,z],spherical);
```


Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

VIII. INTEGRALE CU PARAMETRU

VIII.1 *Integrale cu parametru*

VIII.1.1. Calculaţi următoarele integrale, folosind derivarea sub semnul integral:

1) $F_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+y\sin x}{1-y\sin x}dx$, $|y|<1$; 2) $F_2(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}dx$, $|y|<1$;

3) $F_3(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(ytgx)}{tgx}dx$, $y>0$; deduceţi valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{tgx}dx$;

4) $F_4(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(y\sin x)}{\sin x}dx$, $y>0$.

Ind. 1) Funcţia $f:(-1,1)\times[0,\frac{\pi}{2}]\to\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=\frac{1}{\sin x}\cdot\ln\frac{1+y\sin x}{1-y\sin x}$ şi derivata sa parţială $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2}{1-y^2\sin^2 x}$ sunt continue pe domeniul de definiţie, şi astfel putem aplica teorema VIII.1.1:

$$F_1'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dx}{1-y^2\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+tg^2x)dx}{1+(1-y^2)tg^2x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}},$$

deci $F_1(y)=\pi\arcsin y+C$; cum $F_1(0)=0$, $C=0$;

2) funcţia $f:(-1,1)\times[0,\frac{\pi}{2}]\to\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=\frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+y\cos x}$ fiind continue pe domeniul de definiţie şi astfel:

$$F_2'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+y\cos x}=\int_0^{1}\frac{2dt}{1+y+(1-y)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}arctg\sqrt{\frac{1-y}{1+y}};$$

pentru calculul lui $F_2(y)$ facem schimbarea de variabilă $y=\cos u$ şi obţinem:

$$F_2(y)=-\frac{(ar\cos y)^2}{2}+C$$

Din $F_2(0)=0$, obţinem $C=\frac{\pi^2}{8}$;

3) aplicând teorema VIII.1.1. avem $F_3'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dx}{1+y^2tg^2x}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+y^2t^2)}=$

$=\frac{\pi}{2(1+y)}$; rezultatul este $F_3(y)=\frac{\pi\ln(1+y)}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{tgx}dx=F_3(1)=\frac{\pi\ln 2}{2}$

4) $F_4(y)=\frac{\pi\ln(y+\sqrt{1+y^2})}{2}$.

VIII.1.2. Derivând sub semnul integral funcția $F(y)=\int_0^1\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}arctg\frac{1}{y}$, calculați $\int_0^1\frac{dy}{(1+y^2)^2}$.

Ind. Calculăm pe baza teoremei VIII.1.1. $F'(y)=-2\int_0^1\frac{y}{(x^2+y^2)^2}dx$; derivând direct $F'(y)=(\frac{1}{y}arctg\frac{1}{y})'=-\frac{1}{y^2}arctg\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}$, așadar

$$\int_0^1\frac{y}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{1}{2y^2}arctg\frac{1}{y}+\frac{1}{2y(1+y^2)}.$$

VIII.1.3. Calculați, folosind derivarea sub semnul integral

$$I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx,\ r\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Ind. Considerăm cazul $|r|<1$: $\frac{\partial f}{\partial r}(x,r)=\frac{-2\cos x}{1-2r\cos x+r^2}$ și fiind îndeplinite condițiile teoremei VIII.1.1, avem

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1+r^2-2r\cos x}dx=2\int_0^{\infty}\frac{r-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+r^2-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{2}{r+1}\int_0^{\infty}\frac{t^2+\frac{r-1}{r+1}}{(1+t^2)[t^2+\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2]}dt=\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}+\frac{2(r-1)}{r(r+1)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-r}{r+1}\right)^2}=$$

$$\frac{\pi}{r}-\frac{2}{r}arctg\frac{t(1+r)}{1-r}\Big|_0^{\infty}=0$$

(am făcut substituția $t=tg\frac{x}{2}$); rezultă $I(r)=C$ și din $I(0)=0$ avem:

pentru $|r|<1$ $I(r)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $|r|>1$ vom considera $0=I\left(\frac{1}{r}\right)=\int_0^{\pi}\ln(r^2-2r\cos x+1)dx-\int_0^{\pi}\ln r^2\,dx$, deci

$$\int_0^{\pi}\ln(r^2-2r\cos x+1)dx=2\int_0^{\pi}\ln|r|\,dx=2\pi\ln|r|.$$

VIII.1.4. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$, definite prin: $f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$, $g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$; calculând derivatele acestor funcţii arătaţi că suma lor este o constantă ce se va determina. Calculaţi $\lim_{x\to\infty}g(x)$ şi deduceţi valoarea integralei $\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$.

Ind. Aplicăm propoziţia III.3.7 şi obţinem $f'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$; pentru calculul lui $g'(x)$ folosim teorema VIII.1.1, obţinând:

$$g'(x)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt;$$

făcând schimbarea de variabilă $tx=u$, obţinem $f'(x)=-g'(x)$ şi avem:

$$f(x)+g(x)=c;\ \text{luând}\ x=0,\ \text{rezultă}\ c=\frac{\pi}{4}.$$

Din inegalitatea $e^{-x^2(1+t^2)}<e^{-x^2}$, $\forall\, t\in[0,1]$ şi din $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$, obţinem:

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ astfel încât $\forall\ x>\delta$ avem $e^{-x^2(1+t^2)}<e^{-x^2}<\varepsilon$, $\forall\, t\in[0,1]$.

adică $e^{-x^2(1+t^2)}$ converge uniform la 0, pentru $t\in[0,1]$.

Atunci: $g(x)<\varepsilon\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\varepsilon\frac{\pi}{4}$ şi astfel $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, deci $\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

VIII.2. *Integrale improprii cu parametru*

VIII.2.1. Calculaţi următoarele integrale, folosind derivarea sub semnul integral (teorema VIII.2.2.):

a) $F(y)=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-yx}}{xe^x}dx,\ y>-\frac{1}{2}$; b) $F(y)=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}dx,\ y>-\frac{1}{2}$;

c) $F(y)=\int_0^{\infty}\frac{arctgxy}{x(1+x^2)}dx,\ y>0.$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. a) funcția $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-yx}}{xe^{x}}, & x>0,\ y>-\dfrac{1}{2}\\ y, & x=0,\ y>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ este continuă; convergența integralei $\int_0^{\infty}\dfrac{1-e^{-yx}}{xe^{x}}dx$ rezultă din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\dfrac{1-e^{-yx}}{xe^{x}}=0$ pentru $\alpha=2$; derivata parțială $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-x(y+1)}$ este continuă pe domeniul de definiție iar din $e^{-x(y+1)}<e^{-\frac{x}{2}}$ plus convergența integralei $\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx$ rezultă uniform convergența integralei $\int_0^{\infty}e^{-x(y+1)}dx$. Așadar $F'(y)=\int_0^{\infty}e^{-x(y+1)}dx=\dfrac{1}{y+1}$ și astfel $F(y)=\ln(y+1)+C$; din $F(0)=0$, rezultă $C=0$.

b) funcția $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}, & x>0,\ y>-\dfrac{1}{2}\\ 0, & x=0,\ y>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ este continuă, $\int_0^{\infty}\dfrac{1-e^{-yx^2}}{xe^{x^2}}dx$ este convergentă, $\int_0^{\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int_0^{\infty}xe^{-(y+1)x^2}dx$ este uniform convergentă pentru $y>-\dfrac{1}{2}$; atunci $F'(y)=\int_0^{\infty}xe^{-x^2(y+1)}dx=\dfrac{1}{2(y+1)}$ și astfel $F(y)=\dfrac{1}{2}\ln(y+1)$;

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{arctgxy}{x(1+x^2)}, & x>0,\ y>0\\ y, & x=0,\ y>0\end{cases}$ este continuă pe domeniul de definiție, $\int_0^{\infty}\dfrac{arctgxy}{x(1+x^2)}dx$ este convergentă și din $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}<\dfrac{1}{(1+x^2)}$ rezultă uniform convergența integralei $\int_0^{\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$; atunci $F'(y)=\dfrac{\pi}{2(1+y)}$, deci $F(y)=\dfrac{\pi}{2}\ln(y+1)$

VIII.2.2. Folosind valoarea integralei $F(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\dfrac{\sin\beta x}{x}dx$, $\alpha>0$ să se calculeze $G(\beta)=\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\beta x}{x}dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Calculăm $F'(\alpha)=-\int_0^{\infty} xe^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=-\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}F'(\alpha)$,

deci $F'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ şi $F(\alpha)=-arctg\frac{\alpha}{\beta}+C(\beta)$; cum $\lim_{\alpha\to\infty}F(\alpha)=0$, rezultă

$F(\alpha)=-arctg\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{2}$. Pentru $\alpha=0$ se obţine $G(\beta)=F(0)=\frac{\pi}{2}$.(am putut deriva sub

semnul integral deoarece $-\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$ este uniform convergentă).

VIII.2.3 Fie funcţia $f:[0,\infty)\to R$ continuă cu proprietatea că există $\lim_{x\to\infty}f(x)$

finită; atunci dacă $a,b\in(0,\infty)$ avem: $\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[\lim_{x\to\infty}f(x)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

(*formula Frullani*)

Soluţie. Din continuitatea lui f rezultă existenţa integralei $\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=$

$\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$; atunci

$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\delta\to0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\lim_{\Delta\to0}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$. Aplicăm teorema de medie şi

avem : $\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}$, $a\delta\le\xi\le b\delta$ şi $\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\ln\frac{b}{a}$,

$a\Delta\le\eta\le b\Delta$; pentru $\delta\to0$, avem $\xi\to0$ respectiv pentru $\Delta\to\infty$ avem $\eta\to\infty$ şi

astfel: $\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[\lim_{x\to\infty}f(x)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

VIII.2.4 Aplicând rezultatul precedent calculaţi:

a) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $a,b>0$;

b) $\int_0^{\infty}\ln\frac{p+qe^{-\alpha x}}{p+qe^{-bx}}\frac{dx}{x}$, $p,q>0$;

c) $\int_0^{\infty}\frac{arctgax-arctgbx}{x}dx$, $a,b>0$

d) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$, $a,b>0$;

e) $\int_0^{\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x}dx$, $a,b>0$.

Ind. a) $f(x)=e^{-x}$, valoarea integralei fiind $\ln\frac{b}{a}$; b) $f(x)=\ln(p+qe^{-x})$,

valoarea integralei fiind $\ln\frac{p+q}{p}.\ln\frac{b}{a}$; c) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$; d) $\ln\frac{b}{a}$; e) $ab\ln\frac{b}{a}$.

Scanned with OKEN Scanner

VIII.2.5 Calculați $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, $a,b>0$.

Ind. $\int_a^b \sin xy dy = \frac{\cos ax - \cos bx}{x}$; funcția $f(x,y) = \sin xy$ fiind continuă pe $[0,\infty)\times[a,b]$ avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \int_0^{\infty} [\int_a^b \frac{\sin xy}{x} dy] dx = \int_a^b [\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dy] dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

IX. INTEGRALE MULTIPLE

IX.2. *Calculul integralelor multiple*

IX.2.1. Calculați următoarele integrale duble:

1) $\iint_A \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$, unde A este triunghiul de vârfuri O(0,0), $A(1,-1)$, $B(1,1)$;

2) $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, unde A este limitată de parabola $y=\frac{x^2}{2}$ și de dreapta $y=x$;

3) $\iint_A (x^2+y)dxdy$, unde A este limitată de curbele $y=x^2$ și $x=y^2$;

4) $\iint_A \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, unde A este limitată de curbele $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x\in[1,2]$;

5) $\iint_A e^{\frac{x}{y}}dxdy$, unde A este limitată de parabola $y^2=x$ și dreptele $x=0, y=1$;

6) $\iint_A (|x|+|y|)dxdy$, unde A este definită de: $|x|+|y|\le 1$;

7) $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy$, unde A este definită de: $y^2\le 8x$, $y\le 2x$, $y+4x\le 24$.

Ind. 1) $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1, -x\le y\le x\}$ și astfel: $\iint_A \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy=$

$$=\int_0^1 (\int_{-x}^{x}\sqrt{x^2-y^2}\,dy)dx = \int_0^1 2(\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy)dx = 2\int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2(1-\sin^2 t)}.x\cos t dt)dx =$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{\pi}{6};$$

2) $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 2, x\le y\le \frac{x^2}{2}\}$, $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy=\ln 2$;

3) $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1, x^2\le y\le \sqrt{x}\}$; $\iint_A (x^2+y)dxdy=\frac{33}{140}$;

4) $\iint_A \frac{x^2}{y^2}\,dxdy=\frac{9}{4}$

5) considerând $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ \sqrt{x}\le y\le 1\}$, obținem $I=\int_0^1 (\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}dy)dx$,

şi avem probleme cu calculul primitivei funcţiei $e^{\frac{x}{y}}$; putem evita această situaţie. considerând $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$, atunci $I=\int_0^1\left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx\right)dy=\int_0^1 ye^y dy$;

6) mulţimea A este reuniunea $\bigcup_{i=1}^{4} D_i$, unde

$$A_1=\{(x,y)\mid x+y\le 1, x\in[0,1], y\in[0,1]\},$$
$$A_2=\{(x,y)\mid -x+y\le 1, x\in[-1,0], y\in[0,1]\},$$
$$A_3=\{(x,y)\mid -x-y\le 1, x\in[-1,0], y\in[-1,0]\},$$
$$A_4=\{(x,y)\mid x-y\le 1, x\in[0,1], y\in[-1,0]\},$$

mulţimi disjuncte cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă ce nu influenţează valoarea integralei, deci $\iint_A(|x|+|y|)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x+y)dy\right)dx+\int_{-1}^0\left(\int_0^{1+x}(-x+y)dy\right)dx+$

$+\int_{-1}^0\left(\int_{-x-1}^0(-x-y)dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_{x-1}^0(x-y)dy\right)dx=\frac{4}{3}$;

7) pentru calculul acestei integrale, împărţim mulţimea A în trei submulţimi, care sunt disjuncte cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă:

$$A_1=\{(x,y)\mid x\in[0,2], -\sqrt{8x}\le y\le 2x\};$$
$$A_2=\{(x,y)\mid x\in[2,\frac{9}{2}], -\sqrt{8x}\le y\le \sqrt{8x}\};$$
$$A_3=\{(x,y)\mid x\in[\frac{9}{2},8], -\sqrt{8x}\le y\le 24-4x\},$$

şi astfel $\iint_A\frac{1}{\sqrt{x}}dxdy=\sum_{i=1}^{3}\iint_{A_i}\frac{1}{\sqrt{x}}dxdy=15\sqrt{2}$.

IX.2.2. Calculaţi următoarele integrale duble, folosind schimbarea de variabilă:

1) $\iint_A\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, unde A este sfertul de cerc unitar din primul cadran;

2) $\iint_A(x^2+y^2)dxdy$, unde A este mulţimea din primul cadran, limitată de $x^2+y^2=a^2$, $y=x\sqrt{3}$, $y\sqrt{3}=x$;

3) $\iint_A(x^2+y^2)dxdy$, unde A este limitată de cercul $x^2+y^2=2ax$, $a>0$;

4) $\iint_A\sqrt{4-\frac{(x^2+y^2)^2}{4x^2}}dxdy$, unde A este limitată de cercul $x^2+y^2=4x$;

5) $\iint_A\frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, unde A este sfertul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, situat în primul cadran;

6) $\iint_A(x^2+y^2-4x-4y+10)dxdy$, unde A este mărginită de:

$$x^2+4y^2-2x-16y+13\le 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

7) $\iint\limits_A \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, unde A este mulțimea limitată de parabolele $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$, situată în primul cadran.

8) $\iint\limits_A \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, unde A este limitata de bucla din dreapta a lemniscatei $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geq 0$

Ind. 1) Trecând la coordonate polare, obținem:

$$F^{-1}(A)=\{(r,\varphi)|, r\in[0,1], \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\},$$

și astfel $\iint\limits_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr)d\varphi=\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}-1)$;

2) să scriem inecuațiile ce definesc mulțimea A: $x^2+y^2\leq a^2$, $\frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq x\sqrt{3}$, $x\geq 0$ și apoi trecând la coordonate polare, obținem $r^2\leq a^2$, $\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}}\leq r\sin\varphi\leq\sqrt{3}r\cos\varphi$, deci $F^{-1}(A)=\{(r,\varphi)|, r\in[0,a], \varphi\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]\}$;

$$\iint\limits_A (x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\int\limits_0^a r^3dr)d\varphi=\frac{\pi a^4}{24};$$

3) cercul este $(x-a)^2+y^2=a^2$, și astfel considerăm $x-a=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; atunci $F^{-1}(A)=\{(r,\varphi)|, r\in[0,a], \varphi\in[0,2\pi]\}$ și

$$I=\int\limits_0^a\{\int\limits_0^{2\pi}[(a+r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi].rd\varphi)dr=\frac{3\pi}{2}a^4.$$

Se poate folosi și următoarea metodă, care merită a fi folosită în cazul în care funcția de integrat are o formă mai complicată: interiorul cercului este definit de inegalitatea $x^2+y^2\leq 2ax$ și trecând la coordonate polare $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ devine: $r^2<2ar\cos\varphi$ și astfel $F^{-1}(A)=\{(r,\varphi)|, 0\leq r\leq 2a\cos\varphi, \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$;

4) este evident că se va folosi a doua metodă prezentată la exercițiul anterior. $I=\frac{8\pi}{3}$;

5) folosim coordonate polare generalizate: $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ și $\iint\limits_A\frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=a^2b^2\int\limits_0^1(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}d\varphi)dr=\frac{a^2b^2}{2(a+b)}$;

6) ecuația elipsei, (ce reprezintă frontiera mulțimii A) o scriem sub forma $(x-1)^2+4(y-2)^2\leq 4$ sau $\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2\leq 1$; considerând $x-1=2r\cos\varphi$, $y-2=r\sin\varphi$, $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, obținem: $\iint\limits_A(x^2+y^2-4x-4y+10)dxdy=\frac{17\pi}{2}$;

Scanned with OKEN Scanner

7) $F^{-1}(A)=\{(r,\varphi)|, r\in[1,2], \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$

8) mulțimea este dată de inecuația $(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$, așa că trecând la coordonate polare obținem

$$F^{-1}(A)=\{(r,\kappa)\,|\,0\le r\le a\sqrt{\cos 2\varphi}, \varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\}$$

$$\iint_A \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\Big)d\varphi=\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\Big)\frac{a^2}{2}.$$

IX.2.3. Calculați aria mulțimilor mărginite de curbele:

1) $x=y$, $x=2y$, $x+y=4$, $x+3y=4$;

2) $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$;

Ind. 1) $\mu(A)=\iint_A dxdy$, $A=\bigcup_{i=1}^{3}A_i$, unde $A_1=\{(x,y)\,|\,x\in[\frac{4}{5},1], \frac{4-x}{3}\le y\le 2x\}$,

$A_2=\{(x,y)\,|\,x\in[1,\frac{8}{3}], x\le y\le 2x\}$ și $A_3=\{(x,y)\,|\,x\in[\frac{8}{3},2], x\le y\le 4-x\}$

3) avem $A=\bigcup_{i=1}^{2}A_i$, $A_1=\{(x,y)\,|\,x\in[-\frac{5}{2},-\frac{3}{8}], \sqrt{10x+25}\le y\le -\sqrt{10x+25}\}$,

$A_2=\{(x,y)\,|\,x\in[-\frac{3}{8},3], \sqrt{-6x+9}\le y\le \sqrt{-6x+9}\}$.

IX.2.4. Calculați aria mulțimii mărginite de curbele: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$.

Ind. Mulțimea este determinată de inegalitățile: $x^2+y^2\ge 2x$, $x^2+y^2\le 4x$, $y\le x$, $y\ge 0$ și trecând la coordonate polare obținem: $2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi$, $tg\varphi\le 1$, $\sin\varphi\ge 0$; din rezolvarea sistemului avem:

$$F^{-1}(A)=\{(\varphi,r)|\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{4}],\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi\ \}.$$

IX.2.5. Calculați aria mulțimii mărginite de curba $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Ind. Din simetria mulțimii (vezi figura V.2.7.) rezultă faptul că putem calcula doar aria buclei din dreapta: $\mu(A)=2\iint_A dxdy$ unde A este mulțimea punctelor din $\boldsymbol{R}^2$ ce îndeplinesc condițiile: $(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$; prin trecere la coordonate polare avem: $F^{-1}(A)=\{(\varphi,r)|\ \varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}],\ 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \}$.

IX.2.6. Calculați aria mulțimii mărginite de curba $(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$.

IX.2.7. Calculați, cu ajutorul integralei duble, $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.

Ind. Notăm $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ și observăm că $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}I$; calculăm

Scanned with OKEN Scanner

$I^2 = (\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 = (\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx).(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy) = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2}dxdy$ şi trecând la coordonate polare obţinem: $I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = \pi$, deci $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

IX.2.8. Calculaţi $\iiint_A \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$, unde A este limitată de planele de coordonate şi de planul $x+y+z=1$.

Ind. D fiind proiecţia mulţimii A pe planul xOy avem:

$$D = \{ (x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \}$$

şi astfel: $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | (x,y) \in D,\ 0\le z\le 1-x-y \} \}$ şi astfel:

$$\iiint_A \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2} = \iint_D [\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^2}dz]dxdy = 2\iint_D [-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+y+1}]dxdy =$$

$$= \int_0^1 \{ \int_0^{1-x} [-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+y+1}]dy \}dx .$$

IX.2,9. Calculaţi următoarele integrale triple:

1) $\iiint_A (x+y+z)dxdydz$, unde A este limitată de suprafeţele: $x^2+y^2=2z$ (paraboloid) şi $x^2+y^2+z^2=3$;
2) $\iiint_A z^2 dxdydz$, unde A este porţiunea comună a bilelor: $x^2+y^2+z^2\le 4$ şi $x^2+y^2+z^2\le 4z$;
3) $\iiint_A zdxdydz$, unde A este mulţimea limitată de conul $z^2=x^2+y^2$ şi planul $z=1$;
4) $\iiint_A zdxdydz$, unde A este mulţimea limitată de conul $z^2=x^2+y^2$, de sfera $x^2+y^2+z^2=2Rz$ şi conţine punctul $(0,0,R)$.

Ind. 1) Intersecţia suprafeţelor este cercul $x^2+y^2=2$, $z=1$; notând cu D proiecţia mulţimii A pe planul xOy avem: $D = \{ (x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | x^2+y^2\le 2 \}$şi astfel:

$$A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | (x,y) \in D,\ \frac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{3-x^2-y^2} \} \}$$

$$\iiint_A (x+y+z)dxdydz = \iint_D [\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} (x+y+z)dz]dxdy = \iint_D [(x+y)(\sqrt{3-x^2-y^2} -$$

$$\frac{x^2+y^2}{2}\} + \frac{1}{2}(3-x^2-y^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2]dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} [r(\cos\varphi+\sin\varphi)(\sqrt{3-r^2} -$$

$$\frac{r^2}{2}) + \frac{1}{2}(3-r^2-\frac{r^4}{4})]rdr ;$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Intersecția suprafețelor este cercul $x^2+y^2=3$, $z=1$; notând cu D proiecția mulțimii A pe planul xOy avem: $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | x^2+y^2\le 3\}$ și astfel:

$$A=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 | (x,y)\in D,\ 2-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\}\}$$

$$\iiint_A z^2\,dxdydz=\iint_D[\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\,dz]dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\iint_D[(\sqrt{4-x^2-y^2})^3-(2-\sqrt{4-x^2-y^2})^3]dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\{\int_0^{\sqrt{3}}[(\sqrt{4-r^2})^3-(2-\sqrt{4-r^2})^3]rdr\}d\varphi.$$

3) Intersecția suprafețelor este cercul $x^2+y^2=1$, $z=1$; notând cu D proiecția mulțimii A pe planul xOy avem: $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | x^2+y^2\le 1\}$ și astfel:

$$A=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 | (x,y)\in D,\ 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$\iiint_A z\,dxdydz=\iint_D(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz)dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\int_0^1 r^3\,dr)d\varphi;$$

4) Intersecția suprafețelor este cercul $x^2+y^2=R^2$, $z=R$; notând cu D proiecția mulțimii A pe planul xOy avem: $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | x^2+y^2\le R^2\}$ și astfel:

$$A=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 | (x,y)\in D;\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

$$\iiint_A z\,dxdydz=\iint_D(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[(R+\sqrt{R^2-x^2-y^2})^2-(x^2+y^2)]dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\int_0^R[(R+\sqrt{R^2-r^2})^2 r-r^3]dr\}d\varphi$$

IX.2.10. Calculați următoarele integrale triple:

1) $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde A este definită de: $x^2+y^2+z^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0, z\ge 0$;

2) $\iiint_A \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$, unde A este definită de: $x^2+y^2+z^2\le 9$;

3) $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, unde A este definită de: $x^2+y^2+z^2\le x$;

4) $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, unde A este definită de: $x^2+y^2+z^2\le z$;

5) $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde A este definită de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$;

Scanned with OKEN Scanner

6) $\iiint_A (\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y}{b^2}^2 + \frac{z}{c^2}^2)dxdydz$, unde A este definită de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$, $z\ge 0$;

Ind. 1) Trecând la coordonate sferice

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta,$$

inegalitățile devin: $r^2 \le 1$, $\sin\theta\cos\varphi \ge 0$, $\sin\theta\sin\varphi \ge 0$, $\cos\theta \ge 0$ și astfel

$$F^{-1}(A) = \{(r,\varphi,\theta) \in \boldsymbol{R}^3 |\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\frac{\pi}{2}],\ 0 \le r \le 1\}$$

deci $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint_{F^{-1}(A)} r^4 \sin\theta\, drd\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 dr$

2) trecem la coordonate sferice şi $F^{-1}(A) = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$:

$$\iiint_A \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz = \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^2\sqrt{9-r^2}\,dr;$$

3) folosind coordonatele sferice , inegalitatea ce defineşte mulţimea A devine: $r \le \sin\theta\cos\varphi$ şi atunci

$$F^{-1}(A) = \{(r,\varphi,\theta) \in \boldsymbol{R}^3 |\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\pi],\ 0 \le r \le \sin\theta\cos\varphi\};$$

$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin\theta\cos\varphi} r^3 \sin\theta.dr;$$

dacă am fi făcut schimbarea de variabile

$$x - \frac{1}{2} = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta,$$

$F^{-1}(A) = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$, dar funcţia de integrat se complica, calculul devenind anevoios;

4) procedăm la fel ca în cazul anterior:

$$F^{-1}(A) = \{(r,\varphi,\theta) \in \boldsymbol{R}^3 |\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\frac{\pi}{2}],\ 0 \le r \le \cos\theta\};$$

5) trecem la coordonate sferice generalizate

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta,$$

calculăm jacobianul $j_F = abcr^2\sin\theta$ şi $F^{-1}(A) = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ şi astfel :

$\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz =$

$= abc \iiint_{F^{-1}(A)} r^4(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta)\sin\theta\, drd\varphi d\theta;$

6) $F^{-1}(A) = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ şi

$$\iiint_A (\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y}{b^2}^2 + \frac{z}{c^2}^2)dxdydz = abc \iiint_{F^{-1}(A)} r^4 \sin\theta\, drd\varphi d\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

IX.2.11. Calculați $\iiint_A z^2 dxdydz$, unde A este partea din sfera $x^2+y^2+z^2 \le 1$, care este în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)$, $x \ge 0$.

Ind. $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | \ (x,y) \in D, \ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \}$ unde $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \ (x^2+y^2)^2 \le (x^2-y^2) \}$; atunci

$$\iiint_A z^2 dxdydz = \iint_D [\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz] dxdy = \frac{1}{2} \iint_D [(\sqrt{1-x^2-y^2})^3 - (-\sqrt{1-x^2-y^2})^3] dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \{ \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} (\sqrt{1-r^2})^3 r dr \} d\varphi .$$

IX.2.12. Calculați volumul porțiunii din cilindrul $x^2+y^2 = 2ax$, cuprinsă între paraboloidul $x^2+y^2 = 2az$ și planul xOy.

Ind. $\mu(A) = \iiint_A dxdydz$, unde $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | \ (x,y) \in D, \ 0 \le z \le \frac{x^2+y^2}{2a} \}$ și $D = \{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \ x^2+y^2 \le 2ax \}$ și astfel

$$\iiint_A dxdydz = \iint_D (\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dz) dxdy = \iint_D \frac{x^2+y^2}{2a} dxdy = \frac{1}{2a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr) d\varphi .$$

IX.2.13. Calculați volumul corpului limitat de sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ și conul $x^2+y^2 = z^2$ (exteriorul în raport cu conul).

Ind. Este mai simplu să calculăm volumul V_1 al corpului ce se află în interiorul conului, iar volumul căutat îl găsim ca diferența dintre volumul sferei și V_1; tot pentru simplificarea calculului merită observată simetria figurii în raport cu planul xOy, fapt ce implică $V_1 = 2\iiint_{A_1} dxdydz$ unde

$$A_1 = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | \ (x,y) \in D, \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2} \}$$

$$\text{și } D = \{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \ x^2+y^2 \le \frac{a^2}{2} \}.$$

IX.2.14. Calculați volumul corpului limitat de sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ și paraboloidul $x^2+y^2 = 3z$ (interiorul în raport cu paraboloidul).

Ind. $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | \ (x,y) \in D, \ \frac{x^2+y^2}{3} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \}$ și

$$D = \{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \ x^2+y^2 \le 3 \}.$$

IX.2.15. Calculați volumul corpului limitat de paraboloidul $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ și de planul $x = a$.

Ind. $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | \ (y,z) \in D, \ 2a(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) \le x \le a \}$ și

Scanned with OKEN Scanner

$$D = \{ (y,z) \in \boldsymbol{R}^2 | \frac{y^2}{2b^2} + \frac{z^2}{2c^2} \le 1 \}$$

Atunci

$$\iiint_{A_1} dxdydz = \iint_D \left(\int_{2a(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})}^{a} dz \right) = \iint_D [a - 2a(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})] dxdy = 2bc \int_0^1 [\int_0^{2\pi} a(1-4ar^2) r d\varphi] dr .$$

IX.2.16. Calculaţi volumul corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ şi de paraboloidul $x^2 + y^2 = R^2 - 2Rz$, $z \ge 0$.

Ind. $A = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | (x,y) \in D, \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \}$

şi $D = \{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | x^2 + y^2 \le R^2 \}$ şi $\iiint_A dxdydz = \iint_D \left(\int_{\frac{R^2-x^2-y^2}{2R}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right)$.

IX.2.17. Calculaţi volumul corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ şi de conul $4(x^2 + y^2) = z^2$, (porţiunea din interiorul conului).

Ind. Este mai simplu de calculat volumul V_1 al corpului situat în exteriorul conului, volumul cerut fiind $\frac{4\pi R^3}{3} - V_1$; astfel

$$A_1 = \{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | (x,y) \in D, 2R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le 2\sqrt{x^2 + y^2} \}$$

şi $D_1 = \{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \frac{9R^2}{25} \le x^2 + y^2 \le R^2 \}$ şi $V_1 = \iiint_{A_1} dxdydz = \iint_{D_1} \left(\int_{2R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} dz \right)$

IX.2.18. Calculaţi volumul corpului limitat de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, de conul $(x^2 + y^2) = z^2$, de planele de coordonate, situat în primul cadran.

Ind. Următoarele inegalităţi descriu corpul: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, $(x^2 + y^2) \le z^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$; trecând la coordonate sferice obţinem

$$F^{-1}(A) = [1,4] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

X.1. INTEGRALE CURBILINII

X.1. *Integrala curbilinie de primul tip* (*speța I*).

X.1.1. Calculați $\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, unde γ este segmentul de dreaptă ce unește punctele $O(0,0)$ și $A(1,2)$.

Ind. Ecuațiile parametrice ale curbei sunt $x=t,\ y=2t,\ t\in[0,1]$; atunci;

$$\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5t^2+4}}dt = \ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

X.1.2. $\int_\gamma (x^2+y^2)^n ds$, unde γ este cercul $x^2+y^2=a^2$

Ind. Ecuațiile parametrice ale cercului sunt: $x=a\cos t, y=a\sin t, t\in[0,2\pi]$; atunci $\int_\gamma (x^2+y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} a^{2n}.adt = 2\pi.a^{2n+1}$.

X.1.3 $\int_\gamma (x-y)ds$, unde γ este cercul $x^2+y^2-ax=0$.

Ind. $x^2+y^2-ax=0 \Leftrightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, și astfel ecuațiile parametrice ale cercului sunt: $x=\frac{a}{2}(1+\cos t), y=\frac{a}{2}\sin t, t\in[0,2\pi]$;

$$\int_\gamma (x-y)ds = \int_0^{2\pi}\frac{a}{2}(1+\cos t-\sin t).\frac{a}{2}dt = \frac{\pi.a^2}{2}$$

X.1.4. $\int_\gamma xyds$, unde γ este sfertul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situat în primul cadran.

Ind. Ecuațiile parametrice ale curbei sunt $x=a\cos t, y=b\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$; atunci:

$$\int_\gamma xyds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ab\sin t\cos t\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2}dt =$$

$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

X.1.5. $\int_\gamma xyzds$, curba γ având ecuaţiile parametrice: $x=t$, $y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$, $z=\frac{1}{2}t^2$, $t\in[0,1]$.

Ind. $\int_\gamma xyzds=\int_0^1 \frac{1}{3}\sqrt{2t^3}t^3(1+t)dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

X.1.6. $\int_\gamma xyds$, unde γ este pătratul $|x|+|y|=1$.

Ind. Folosim proprietatea de aditivitate la curbă: $\int_\gamma xyds=\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}xyds$, unde reprezentările parametrice ale curbelor γ_i sunt:

$$\gamma_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\end{cases},t\in[0,1],\ \gamma_2\begin{cases}x=-1-t\\ y=-t\end{cases},t\in[-1,0],\ \gamma_3\begin{cases}x=t\\ y=-1-t\end{cases},t\in[-1,0],$$

$$\gamma_4\begin{cases}x=t\\ y=t-1\end{cases},t\in[0,1];\ \int_\gamma xyds=0.$$

X.1.7. Calculaţi $\int_\gamma (x+y)ds$, unde γ este bucla din dreaptă a lemniscatei lui Bernoulli $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Ind. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt: $\begin{cases}x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\\ y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$;

$$\int_\gamma (x+y)ds=a^2\sqrt{2}.$$

X.1.8. $\int_\gamma x\sqrt{x^2-y^2}ds$, unde γ este curba definită de ecuaţia $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geq 0$.

Ind. In coordonate polare bucla din dreapta a lemniscatei lui Bernoulli are ecuaţia $r^2=a^2\cos 2\varphi$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. $\int_\gamma x\sqrt{x^2-y^2}ds=\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

X.1.9. $\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, unde γ este prima spiră a elicei $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$, (adică $t\in[0,2\pi]$).

R. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\frac{2\pi.b}{a}$.

Scanned with OKEN Scanner

X.1.10. $\int_\gamma xyzds$, unde γ sfertul din cercul $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ situat în primul octant.

Ind. Cercul este intersecţia cilindrului $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ cu sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$, intersecţie ce are loc în planul $z=\frac{\sqrt{3}R}{2}$; ecuaţiile parametrice ale sfertului de cerc sunt: $x=\frac{R}{2}\cos t$, $y=\frac{R}{2}\sin t$, $z=\frac{\sqrt{3}R}{2}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

X.1.11.. $\int_\gamma \sqrt{2y^2+z^2}ds$, unde γ este cercul $x^2+y^2+z^2=a^2, x=y$.

Ind. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt: $x=y=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, z=a\sin t, t\in[0,2\pi]$.

$\int_\gamma \sqrt{2y^2+z^2}ds=2\pi.a^2$.

X.1.12. $\int_\gamma (x+y)ds$ unde γ este sfertul de cerc $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x=y$, situat în primul octant.

R. $R^2\sqrt{2}$.

X.1.13. Să se determine masa firului determinat de $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ între punctele cu abscisele $x_1=0$, $x_2=a$ ştiind că densitatea este invers proporţională cu ordonata punctului, iar în punctul $(0,a)$ este δ.

Ind. Masa firului este dată de $M=\int_\gamma \rho.ds$, unde $\rho=\frac{k}{y}$, deci $\delta=\frac{k}{a}$ şi astfel determinăm $k=a\delta$; ecuaţiile parametrice ale curbei sunt: $x=t,. y=\frac{a}{2}(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}})$, $t\in[0,a]$.

$$M=a\delta\int_\gamma\frac{ds}{y}=a\delta.\int_0^a\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}})^2}}{\frac{a}{2}(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}})}dt=\delta.\int_0^a\frac{\sqrt{(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}})^2}}{(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}})}dt=a\delta.$$

X.1.14. Calculaţi masa firului determinat de $y=\ln x$, între punctele de abscise x_1 şi x_2, dacă densitatea In fiecare punct este pătratul abscisei punctului respectiv.

Ind. $M=\int_\gamma x^2.ds$, unde ecuaţiile parametrice ale curbei sunt: $x=t, y=\ln t$, $t\in[x_1,x_2]$. $M=\frac{1}{3}[(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}]$.

Scanned with OKEN Scanner

X.15 Determinați masa repartizată pe prima spiră a elicei $x = a\cos t, y = a\sin t$, $z = bt$ dacă densitatea în fiecare punct este egala cu lungimea razei vectoare a punctului.

Ind. $M = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 t^2}\,.\sqrt{a^2 + b^2}\,dt =$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi.b^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi.b + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2}}{a})$.

X.2 *Integrala curbilinie de al doilea tip (speța a doua)*

X.2.1. Calculați $\int_{\gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ unde γ este cercul $x^2 + y^2 = a^2$ parcurs în sens trigonometric.

Ind. Ecuațiile parametrice ale cercului sunt $x = a\cos t, y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;

$$\int_{\gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2[(\cos t + \sin t).(-\sin t) - (\cos t - \sin t).\cos t]}{a^2} dt = -2\pi.$$

X.2.2. $\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$, unde γ este cercul $x^2 + y^2 = 1$ parcurs de n ori, ($n \in N^*$) în sens trigonometric.

Ind. Ecuațiile parametrice ale cercului unitate parcurs de n ori sunt:

$$x = \cos nt, y = \sin nt, t \in [0, 2\pi];$$

aşadar: $\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy = \int_0^{2\pi} [-\frac{\sin nt}{\cos^2 nt + \sin^2 nt}(-n\sin nt) +$

$+ \frac{\cos nt}{\cos^2 nt + \sin^2 nt}.(n\cos nt)]dt = 2n\pi$.

X.2.3. $\int_{\gamma} \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy$, γ fiind semicercul $x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0$ parcurs în sens trigonometric

Ind. Tinând seama că $x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, ecuațiile parametrice ale semicercului sunt $x = 1 + \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$;

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy = -(\pi + 4)$$

Scanned with OKEN Scanner

X.2.4. $\int_\gamma x^2dy+y^2dx$, γ fiind cercul $x^2+y^2-ax=0$, $a>0$ parcurs în sens trigonometric.

R. $\frac{\pi.a^3}{4}$

X.2.5. $\int_\gamma y^2dx+x^2dy$, unde γ este semielipsa superioară $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, parcursă în sens trigonometric.

Ind. Ecuațiile parametrice ale curbei sunt $x=a\cos t, y=b\sin t$, $t\in[0,\pi]$;

$$\int_\gamma y^2dx+x^2dy=\frac{4}{3}ab^2.$$

X.2.6. $\int_\gamma \frac{dy}{x+3}$, γ fiind arcul elipsei $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, cuprins între punctele $A(3,0)$ și $B(0,2)$ parcurs în sens trigonometric.

R. $\int_\gamma \frac{dy}{x+3}=\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}-1)$.

X.2.7. $\int_\gamma y^2dx+x^2dy$, unde γ este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}=0$, parcursă în sens trigonometric.

Ind. Observând că $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2}{2a^2}+\frac{(y-b)^2}{2b^2}=1$, ecuațiile parametrice ale acestei elipse sunt: $x=a(1+\sqrt{2}\cos t)$, $y=b(1+\sqrt{2}\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

$$\int_\gamma y^2dx+x^2dy=4\pi ab(a-b)$$

X.2.8. $\int_\gamma xdy-ydx$, unde γ este curba $x^2+y^2=a^2$, $y=x\sqrt{3}$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x\geq 0$, parcursă în sens trigonometric.

Ind. $\int_\gamma xdy-ydx=\sum_{i=1}^{3}(\int_{\gamma_i} xdy-ydx)$, unde

$$\gamma_1:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{t}{\sqrt{3}}\end{cases}, t\in[0,\sqrt{3}],\ \gamma_2:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}, t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}],\ \gamma_3:\begin{cases}x=1-t\\ y=\sqrt{3}(1-t)\end{cases}, t\in[0,1];$$

avem $\int_\gamma xdy-ydx=\int_0^{\sqrt{3}}(\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{t}{\sqrt{3}})dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4dt+\int_0^1[-\sqrt{3}(1-t)+\sqrt{3}(1-t)]dt=\frac{2\pi}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

X.2.9. $\int_\gamma \frac{x+y}{x-y}(xdx-ydy)$, γ este curba definită de $x^2+y^2=1$, $y=0$, $y=xtg\alpha$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$, parcursă în sens trigonometric.

R. $\int_\gamma \frac{x+y}{x-y}(xdx-ydy)=\ln\sqrt{1-\sin 2\alpha}$

X.2.10. $\int_\gamma (x+y)dx-ydy$, unde γ este curba $xy=2, y=2x, y=\frac{x}{2}, x\geq 0$.

R. $\int_\gamma (x+y)dx-ydy$= -3 - ln2.

X.2.11. $\int_\gamma \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, γ fiind curba $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, a>0$ din primul cadran, parcursă în sens trigonometric.

Ind. Ecuațiile parametrice ale astroidei (în primul cadran) sunt :

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}];$$

$$\int_\gamma \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^3(\cos^5 t+\sin^5 t)\cos^2 t\sin^2 t}{a^{\frac{5}{3}}(\cos^5 t+\sin^5 t)}dt=\frac{3}{4}a^{\frac{4}{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{3}{16}a^{\frac{4}{5}}.$$

X.2.12. $\int_\gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz$, unde γ este curba de intersecție a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ cu conul $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$, $c>0$.

Ind. Curba de intersecție este o elipsă situată în planul $z=\frac{c}{\sqrt{2}}$, de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$; ecuațiile parametrice ale elipsei sunt: $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t$, $z=\frac{c}{\sqrt{2}}$, $t\in[0,2\pi]$.

X.2.13. $\int_\gamma (2a-y)dx-(a-y)dy$, unde γ este prima buclă a cicloidei $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Ind. Prima bucla a cicloidei se obține pentru $t\in[0, 2\pi]$; așadar;

$$\int_\gamma (2a-y)dx-(a-y)dy=\int_0^{2\pi}[a^2(1+\cos t)(1-\cos t)+a^2\cos t\sin t]dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}[\sin^2 t-\cos t\sin t]dt=\pi.a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

X.2.14. Calculaţi integrala curbilinie $\int_\gamma \frac{dy}{(x+y)(x^2+y+1)}$, pe arcul de parabolă $y=x^2$ situat în primul cadran.

Ind. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt : $x=t, y=t^2$, $t\in(0,\infty)$;

$$\int_\gamma \frac{dy}{(x+y)(x^2+y+1)}=\int_0^\infty \frac{2tdt}{(1+t)(2t^2+1)}.$$

Integrala $\int_0^\infty \frac{2tdt}{(1+t)(2t^2+1)}$ este convergentă deoarece gradul numitorului este cu trei unităţi mai mare decât gradul numărătorului.

$$\int_0^\infty \frac{2tdt}{(1+t)(2t^2+1)}=\frac{2}{3}\int_0^\infty [\frac{1}{1-x}-\frac{2(x-1)}{2x^2+1}]dx=\frac{2}{3}\ln\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+1}}|_0^\infty+\frac{2\sqrt{2}}{3}arctg\sqrt{2}x|_0^\infty=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

X.3. *Forme diferenţiale exacte*

X.3.1. Calculaţi $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy$, de-a lungul curbelor: 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^3$, 4) $y^2=x$.

Ind. 1) $I_1=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$; 2) $I_2=\int_0^1(3t^3-2t^2)dt=\frac{1}{12}$;

3) $I_3=\int_0^1(3t^5+t^4-2t^2)dt=-\frac{1}{20}$; 4) $I_4=\int_0^1(t\sqrt{t}-\frac{\sqrt{t}}{2}+\frac{1}{2})dt=\frac{17}{30}$.

X.3.2. Verificaţi dacă următoarele integrale luate de-a lungul unor curbe închise au valoarea egala cu zero, ştiind că funcţiile f şi g sunt de clasă C^1 pe un domeniu convex.

1) $\oint f(x)dx+g(y)dy$; 2) $\oint f(xy)(ydx+xdy)$; 3) $\oint f(\frac{y}{x})\frac{xdy-ydx}{x^2}$;

4) $\oint[f(x+y)+f(x-y)]dx+[f(x+y)-f(x-y)]dy$;

5) $\oint f(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz)$.

Ind. Verificăm dacă formele diferenţiale sunt închise, şi aplicând propoziţia IX.2.3, obţinem că sunt exacte, deci conform propoziţiei IX.2.2. integrala $\oint\omega=0$; de exemplu:

Scanned with OKEN Scanner

2) $\frac{\partial}{\partial y}(yf(xy)) = f(xy) + xy\frac{\partial}{\partial y}(f(xy))$ şi $\frac{\partial}{\partial x}(xf(xy)) = f(xy) + xy\frac{\partial}{\partial x}(f(xy))$

5) $\frac{\partial}{\partial y}(xf(x^2+y^2+z^2)) = 2xy.\frac{\partial}{\partial y}(f(x^2+y^2+z^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(yf(x^2+y^2+z^2)).$;

$\frac{\partial}{\partial z}(xf(x^2+y^2+z^2)) = 2xz.\frac{\partial}{\partial z}(f(x^2+y^2+z^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(zf(x^2+y^2+z^2)).$

$\frac{\partial}{\partial y}(zf(x^2+y^2+z^2)) = 2yz.\frac{\partial}{\partial y}(f(x^2+y^2+z^2)) = \frac{\partial}{\partial z}(yf(x^2+y^2+z^2)).$

X.3.3. Calculaţi următoarele integrale curbilinii din forme diferenţiale exacte:

1) $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$; 2) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 3) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx-xdy}{y^2}$.

Ind Integralele nu depind de drumul ales: 1) alegem drumul (3,4)→(5,4)→(5,12) adică $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ unde $\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = 4 \end{cases}, t \in [3,5]$, $\gamma_2 \begin{cases} x = 5 \\ y = t \end{cases}, t \in [4,12]$ şi astfel :

$$\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int_3^5 \frac{t}{t^2+4}dt + \int_4^{12} \frac{t}{25+t^2}dt = \ln\frac{13}{5}$$

Remarcă

Stiind că $\omega = df$ (eventual mai verificăm), observăm fără dificultate că $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$; conform propoziţiei IX.2.1. avem $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = f(3,4) -$

$- f(5,12) = \frac{1}{2}\ln\frac{25}{169} = \ln\frac{13}{5}$.

2) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$; 3) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx-xdy}{y^2} = \frac{3}{2}$.

X.3.4. Calculaţi $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ unde γ este sfertul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, situat în primul cadran.

Ind. Problema poate fi calculată clasic; dacă însă observăm că $\omega = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} =$

$d(\sqrt{1+x^2+y^2})$, atunci

$$\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = (\sqrt{1+x^2+y^2})(a,0) - (\sqrt{1+x^2+y^2})(0,b) = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}.$$

X.3.5. Găsiţi funcţiile ale căror diferenţiale sunt:

1) $du = 4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$; 2) $du = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx - \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}dy$;

3) $du = \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$; 4) $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + (\frac{e^y}{1+x^2}+1)dy$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Folosim formula

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

şi astfel: 1) $u(x,y)=(x^2-y^2)^2+C$; 2) $u(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$;

3) $u(x,y)==\ln|x+y|-\dfrac{y}{x+y}+C$; 4) $u(x,y)=\dfrac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$.

X.3.6. Să se determine mulţimea în care forma diferenţială $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}dx+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}dy$ este exactă şi apoi funcţia a cărei diferenţială este.

Ind. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2|y|\sqrt{x^2+y^2}}$, aşadar $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ pentru $y>0$.

$$F(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}[\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}dx+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}dy]=\int_1^y\sqrt{\sqrt{t^2}}dt$$

$$+\int_0^x\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}dt=\frac{2}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{3}+\int_0^x\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}dt,\ x>0,y>0.$$

Facem schimbarea de variabilă $t=yctgu$;

$$\int_0^x\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}dt=y\sqrt{y}\int_{arcctg\frac{x}{y}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{tg\frac{u}{2}}\frac{du}{\sin^2u}$$

In continuare punem $tg\dfrac{u}{2}=v$ şi obţinem::

$$\frac{y\sqrt{y}}{2}\int_{\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{y}}^{1}\frac{1+v^2}{v^{\frac{3}{2}}}dv=y\sqrt{y}\frac{v^2-3}{3\sqrt{v}}\Big|_{\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{y}}^{1}=$$

$$\int_0^x\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}dt=y\sqrt{y}(\frac{2(x^2-y^2)}{3y\sqrt{y}\sqrt[4]{2x^2-y^2}}-\frac{2}{3}),$$

şi astfel $F(x,y)=\dfrac{2}{3}[\dfrac{(x^2-y^2)}{\sqrt[4]{2x^2-y^2}}-1],\ x>0,y>0.$

X.3.7. Alegeţi numărul n astfel încât expresia $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ să fie o formă diferenţială exactă; găsiţi funcţia corespunzătoare.

R. $n=1$, $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+arctg\dfrac{y}{x}+c$.

X.3.8. Calculaţi constantele a şi b astfel încât expresia

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$$

să fie o formă diferențiala exactă și apoi găsiți funcția a cărei diferențială este.

R. $a=b=-1$, $u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$

X.3.9. Fie P,Q două funcții de clasă C^1 pe un domeniu convex $D\subset \boldsymbol{R}^2$ astfel încât $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$; atunci forma diferențială $\omega(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ este exactă $\omega=df$ și soluția $y=y(x)$ a ecuației diferențiale $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ are proprietatea că $f(x,y)=C$.

Ind. Forma diferențială ω este închisă, deci este exactă, existând $f\in C^1(D)$ astfel încât $\omega=df$; ecuația $df=0$ are în D soluția $f(x,y)=C$, C fiind o constantă arbitrară.

X.3.10. Să se arate că integrala curbilinie

$$\int_{AB}\omega=\int_{AB}(x^2-yz+\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y^2-zx-\frac{x}{x^2+y^2})dy+(z^2-xy)dz$$

nu depinde de drum într-un domeniu convex care nu conține originea. Să se calculeze pentru $A(1,1,1)$ și $B(2,2,3)$.

Ind. Arătăm că forma diferențială ω este închisă și fiind în condițiile corolarului propoziției IX.3.3 este exactă, deci conform propoziției IX.3.2 $\int_{AB}\omega$ nu depinde de alegerea drumului. Avem:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2-yz+\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial x}(y^2-zx-\frac{x}{x^2+y^2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x^2-yz+\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial x}(z^2-xy),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(y^2-zx-\frac{x}{x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial y}(z^2-xy).$$

Pentru a obține integrala din enunț este suficient să calculăm pe drumul:

$$(1,1,1)\to(2,1,1)\to(2,2,1)\to(2,2,3),$$

adică $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ unde

$$\gamma_1:\begin{cases}x=t,\\ y=1, t\in[1,2];\\ z=1\end{cases}\quad \gamma_2:\begin{cases}x=2,\\ y=t, t\in[1,2]\\ z=1\end{cases}\quad \gamma_3:\begin{cases}x=2,\\ y=1, t\in[1,3];\\ z=t\end{cases}$$

$$\int_{AB}\omega=\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i}\omega=\int_1^2\frac{dt}{t^2+1}+\int_1^2(t^2-2-\frac{2}{t^2+4})dt+\int_1^3(t^2-4)dt=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

X.3.11. Calculaţi 1) $\int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz$; 2) $\int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zxdy + xydz - yzdx}{(x-yz)^2}$ (curba pe care integrăm nu intersectează suprafaţa $z = \frac{x}{y}$).

Ind. 1) alegem drumul (0,2,3)→(3,2,3)→(3,2,1)

adică $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ unde $\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = 2, t \in [0,3] \\ z = 3 \end{cases}$, $\gamma_2 \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \quad t \in [1,3] \\ z = 4 - t \end{cases}$ şi astfel :

$$\int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz = \int_0^3 6dt - \int_1^3 6dt = 6;$$

altfel se observă că $\int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz = \int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} d(xyz) = 6.$

2) $\int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zxdy + xydz - yzdx}{(x-yz)^2} = -\frac{9}{2}.$

X.3.12. $\oint_\gamma \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, unde γ este curba de intersecţie a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2Rx$, $z \geq 0$, (curba lui Viviani), parcursă în sens trigonometric când privim din origine.

Ind. Este o formă diferenţială exactă deci conform propoziţiei IX.2.1. integrala pe o curbă închisă este nulă.

Merită reţinută şi maniera de a scrie ecuaţiile parametrice ale curbei: curba fiind situată pe cilindrul $x^2 + y^2 = 2Rx$ se folosesc coordonatele cilindrice:

$$x = r\cos t, y = r\sin t, z = z;$$

cercul de bază a cilindrului are ecuaţia $r = R\cos t$, deci $x = R\cos^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = z$. Curba fiind şi pe sferă $R^2\cos^4 t + R^2 \sin^2 t\cos^2 t + z^2 = R^2$, de unde $z = R\sin t$.

X.3.13. Găsiţi funcţiile ale căror diferenţiale sunt:

1) $du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 2) $du = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{1 + x^2y^2z^2}$; 3) $du = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$;

4) $du + \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{xy - z - z^3}{z^2}$; 5) $du = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})dy - \frac{xy}{z^2}dz$

Ind. Folosim formula $F(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$

$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt$ şi astfel:

1) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$; 2) $F(x,y,z) = arctgxyz + C$;

Scanned with OKEN Scanner

3) $F(x,y,z) == \ln(x+y+z)+C$; 4) $F(x,y,z)=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$;

5) $F(x,y,z)=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$.

X.3.14. Determinaţi potenţialul câmpului gravitaţional generat de un punct material de masă m concentrată în originea axelor de coordonate :

$$G=(-\frac{mx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},-\frac{my}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},-\frac{mz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}).$$

Arătaţi că potenţialul g verifică ecuaţia lui Laplace: $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=0$.

R. $g(x,y,z)=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

X.3.15. Calculaţi integrala $\oint_\gamma 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, unde γ este perimetrul triunghiului de vârfuri $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, folosind formula Green-Riemann (teorema X.2.2); verificaţi apoi rezultatul prin calcul direct.

Ind. $\oint_\gamma 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint_K[2(x+y)-4y]dxdy=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy$.

X.3.16. Calculaţi integrala $\oint_\gamma -y^3dx+x^3dy$, γ fiind cercul $x^2+y^2=1$, parcurs în sens trigonometric, cu ajutorul formulei Green-Riemann.

Ind. $\oint_\gamma -y^3dx+x^3dy=3\iint_K(x^2+y^2)dxdy=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr$.

X.3.17. Calculaţi cu ajutorul formulei Green-Riemann $\int_{\gamma^+}3xy[xdy+(2a-y)dy]$ unde γ este frontiera mulţimii K definită de $x^2+y^2-2ay\le 0$, $y\ge a$, γ fiind parcursă în sens trigonometric.

Ind. $\int_{\gamma^+}3xy[xdy+(2a-y)dy]=3\iint_K(2ay-x^2-y^2)dxdy=$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{a}{\sin\varphi}}^{2a\sin\varphi}(2ar^2\sin\varphi-r^3)dr.$$

(Trecând la coordonate polare, am obţinut inegalitatea $\frac{a}{\sin\varphi}\le r\le 2a\sin\varphi$ şi astfel impunem condiţiile $\sin\varphi\ge 0$, $\frac{1}{\sin\varphi}\le 2\sin\varphi$ rezultând $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$).

Scanned with OKEN Scanner

X.3.18. Calculați $\int_{\gamma^+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, unde γ este

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; b) $x^2+y^2=2ax$, $a,b>0$, γ fiind parcursă în sens trigonometric

Ind. $\int_{\gamma^+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\iint_K[(y+1)-(x+1)]dxdy=$

a) $ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi$;

b) $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(r\sin\varphi-r\cos\varphi-a)d\varphi$.

X.3.19. Arătați că $\oint_{fr K}(2xy-y)dx+x^2dy$, unde K este un compact bordat elementar este egala cu aria lui K.

Ind. Se arată imediat, folosind formula Green-Riemann.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

XI. INTEGRALE DE SUPRAFATA

X.1. *Intergale de suprafață*

XI.1.1. Să se calculeze aria porțiunii suprafeței $z=\frac{1}{a}xy$, $a>0$, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2+y^2=a^2$.

Ind. $f(x,y)=\frac{1}{a}xy$ și $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}$, deci

$$\text{aria}(\Sigma)=\iint\limits_A \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dxdy,$$

unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\le a^2\}$. Trecând la coordonate polare

$$\text{aria}(\Sigma)=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\sqrt{r^2+a^2}\,dr=\frac{2\pi.a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

XI.1.2. Să se calculeze aria suprafeței $2z=x^2+y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$

Ind. $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ și $\text{aria}(\Sigma)=\iint\limits_A \sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dxdy$,

unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\le 1\}$; se trece la coordonate polare:

$$\text{aria}(\Sigma)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{r^2+a^2}\,dr=\frac{2\pi.}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

XI.1.3. Să se calculeze aria suprafeței $x^2+y^2+z^2=a^2$, decupată de cilindrul $x^2+y^2=R^2\,(R\le a)$.

Ind. Merită observată simetria celor două suprafețe obținute , în raport cu planul xOy, fapt ce permite simplificarea calculului:

$$\text{aria}(\Sigma)=2\iint\limits_A\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\le R^2\}$;

$$\text{aria}(\Sigma)=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=4\pi.a(a-\sqrt{a^2-R^2}).$$

XI.1.4. Să se calculeze aria suprafeței $x^2+y^2+z^2=R^2$, decupată de cilindrul $x^2+y^2=Rx$.

Ind. Din nou se observă simetria figurii în raport cu planul xOy;

$$\text{aria}(\Sigma)=2\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \text{ unde } A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\le Rx\}$$

și astfel

$$\text{aria}(\Sigma)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2R^2(\pi-2).$$

XI.1.6. Să se calculeze aria suprafeței $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, situată în exteriorul cilindrulor $x^2+y^2=\pm ax$.(Viviani)

Ind. Cilindrii $x^2+y^2=ax$ și $x^2+y^2=-ax$ decupează în sfera dată patru ferestre Viviani; aria unei ferestre decupate de cilindrul $x^2+y^2=ax$ este :

$$\text{aria}(\Sigma_1)=2\iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

unde $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ și $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\le ax,\ y\ge 0\}$ și astfel:

$$\text{aria}(\Sigma_1)=2a\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\pi.a^2-2a^2,$$

deci aria căutată $\text{aria}(\Sigma)=8a^2$.

XI.1.7. Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ în suprafață $x^2+y^2=2az$.

Ind. $f(x,y)=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$ și $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\}$;

calculăm aria$(\Sigma)=2\iint_{A_1}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ (unde A_1 este bucla din dreapta a lemniscatei, adică $\text{aria}(\Sigma)=\frac{2}{a}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\sqrt{a^2+r^2}dr=\frac{1}{9}a^2(20-3\pi)$.

XI.1.8. Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ în suprafață $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Ind. $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ și $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\}$;

$$\text{aria}(\Sigma)=2a\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=4a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=2a^2(\pi+4-4\sqrt{2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

XI.1.9. Să se calculeze $\iint_{\Sigma}(x+y+z)d\sigma$, unde Σ suprafața $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$

Ind. Σ are reprezentarea parametrică: $x=R\cos u\sin v$, $y=R\sin u\sin v$, $z=R\cos v$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$, iar $\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|=R^2\sin v$; atunci: $\iint_{\Sigma}(x+y+z)d\sigma =$

$=R^3\int_0^{2\pi}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2 v\cos u+\sin u\sin^2 v+\sin v\cos v]dv=\pi.a^3$.

XI.1.10. Calculați $\iint_{\Sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+az+a^2}}$, unde Σ suprafața octantului de sferă $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.

R. $\iint_{\Sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+az+a^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin v dv}{a\sqrt{2+\cos v}}=\frac{\pi a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

XI.1,11. Calculați $\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, unde Σ este fața laterală a conului $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $0\leq z\leq b$.

Ind. $\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\iint_{A}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy=$

$=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}\iint_{A}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x^2+y^2\leq a^2\}$.

XI.1.12. Să se calculeze $\iint_{\Sigma}xyzd\sigma$ unde Σ este porțiunea din planul $x+y=z=1$ ce se află în primul cadran.

Ind. $\iint_{\Sigma}xyzd\sigma=\iint_{A}xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy$,

unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 |\ x+y\leq 1,\ x\geq 0, y\geq 0\}$.

XI.1.13. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\vec{k}$ prin fața exterioară a paraboloidului $z=4x^2+y^2$, $0\leq z\leq 1$.

Ind. Cum $\cos\gamma<0$ (normala la Σ face cu axa Oz un unghi obtuz), avem:

$$\vec{N}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}=\frac{8x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+64x^2+4y^2}}$$

și astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$$\iint_{\Sigma}\left\langle \vec{k}\,\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}},\ \vec{N}\right\rangle d\sigma=-\iint_{A}\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\,dxdy,$$

unde $A=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 4x^2+y^2\le 1\}$; $\iint_{\Sigma}\left\langle \vec{v},\vec{N}\right\rangle d\sigma=\pi(1-\sqrt{2})$

XI.1.14. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}+\frac{1}{z}\vec{k}$ prin suprafața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Ind. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului sunt:

$x=a\cos u\sin v$, $y=b\sin u\sin v$, $z=c\cos v$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\pi]$,

$\vec{r}_u=-a\sin u\sin v.\vec{i}+b\cos u\sin v.\vec{j}$, $\vec{r}_v=a\cos u\cos v\vec{i}+b\sin u\cos v\vec{j}-c\sin v.\vec{k}$, şi

$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=-bc\cos u\sin v.\vec{i}-ac\sin u\sin v.\vec{j}-ab\cos v.\vec{k}$; atunci:

$$\iint_{\Sigma}\left\langle \vec{v},\vec{N}\right\rangle d\sigma=\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\sin v.dudv=\frac{4\pi(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}{abc}$$

Merită reținut că nu se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski (vezi X.2), deoarece $\vec{v}$ nu este definit pe axele de coordonate, deci nu este definit în interiorul elipsoidului

XI.1.15. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=z^2.\vec{k}$ prin suprafața exterioară a semi - elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\ge 0$.

Ind. Ecuațiile parametrice ale semi- elipsoidului sunt:

$x=a\cos u\sin v$, $y=b\sin u\sin v$, $z=c\cos v$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$;

In rest se calculează analog cu problema precedentă.

XI.2. *Formule integrale*

XI.2.1. Calculați

a) $div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, unde $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ şi $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

b) $div\left(f(r).\frac{\vec{r}}{r}\right)$, unde f este o funcție derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.

c) $div(grad\varphi)$, unde $\varphi: D\to\boldsymbol{R}$ este o funcție de clasă C^2 pe domeniul $D\subset\boldsymbol{R}^3$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) $\frac{2}{r}$; b) $\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$; c) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

XI.2.2. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin faţa exterioară a cubului $[0,a]\times[0,a]\times[0,a]$.

Ind. Se aplică formula Gauss-Ostrogradski (X.2.1)

$$\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=\iiint_K(div\,\vec{v})\,dxdydz=2\iiint_K(x+y+z)\,dxdydz=2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(x+y+z)dz=$$

$$=\frac{abc}{2}(a+b+c).$$

XI.2.3. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ prin faţa exterioară a piramidei limitată de planele: $x+y+z=a$, $x=0,y=0,z=0$.

Ind. $\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=3\iiint_K dxdydz=\frac{a^3}{2}$.

XI.2.4. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Ind. $\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=2\iiint_K(x+y+z)\,dxdydz$; apoi se trece la coordonate sferice.

XI.2.5. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ prin faţa exterioară a cilindrului $x^2+y^2=R^2$, $0\le z\le H$.

Ind. $\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=3\iiint_K dxdydz=\pi R^2H$.

XI.2.6. Calculaţi fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Ind. $\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=2\iiint_K(x+y+z)\,dxdydz=$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(a+b+c+r\sin\theta\cos\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta)r^2\sin\theta.dr$$

XI.2.7. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=xz\vec{i}+x^2y\vec{j}+y^2z\vec{k}$ prin faţa exterioară a suprafeţei închise, situată în primul octant, limitată de paraboloidul $z=x^2+y^2$, cilindrul $x^2+y^2=1$ şi planele de coordonate.

Ind. Se aplică formula Gauss- Ostrogradski:

$$\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=\iiint_K(z+x^2+y^2)\,dxdydz=\iint_A[\int_0^{x^2+y^2}(z+x^2+y^2)dz]dxdy,$$

unde $A=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2|\ x^2+y^2\le1,\ x\ge0,y\ge0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

XI.2.8. Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ prin:

a) faţa laterală a conului $x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1$

b) faţa totală a conului .

Ind. a) nu se poate aplica formula Gauss- Ostrogradski, suprafaţa nefiind închisă. Cum $\cos\gamma<0$ (normala la Σ face cu axa Oz un unghi obtuz), avem:

$$\vec{N}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}-\vec{k}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}.\sqrt{x^2+y^2}}$$

şi astfel:

$$\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=\iint_\Sigma\langle x^3\,\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}\,,\,\vec{N}\rangle d\sigma=$$

$$=\iint_A[\frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-(\sqrt{x^2+y^2})^3]dxdy,$$

unde $A=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1\}$.

b) se aplică formula Gauss- Ostrogradski:

$$\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=3\iiint_K(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\iint_A\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,]dxdy,$$

unde $A=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1\}$.

XI.2.9. Demonstraţi că volumul unui compact K, a cărui frontieră este suprafaţa Σ este: $V=\frac{1}{3}\iint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)d\sigma$, unde $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai normalei exterioare a suprafeţei Σ.

Ind. Aplicăm formula Gauss-Ostrogradski:

$$\iint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)d\sigma=3\iiint_K dxdydz=3V.$$

XI.2.10. Calculaţi fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, unde $u(x,y,z)$ este o funcţie de clasă C^2 pe compactul K, prin frontiera lui K, care este suprafaţa Σ.

Ind. Aplicăm formula Gauss-Ostrogradski;

$$\iint_\Sigma\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=\iiint_K(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2z}{\partial z^2})\,dxdydz.$$

XI.2.11. Calculaţi $grad(div\,\vec{v})$, $div(rot\,\vec{v})$, $rot(grad\varphi)$, $rot(rot\,\vec{v})$, unde $\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, de clasă C^2 pe domeniul $D\subset R^3$, iar $\varphi: D\to R$ este o funcţie de clasă C^2.

Scanned with OKEN Scanner

XI.2.11. Calculați, cu ajutorul formulei Stokes (XI.2.2), circulația câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z) = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, de-a lungul cercului $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, luând ca suprafață semisfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Ind. Semisfera are reprezentarea parametrică $x = \cos u \sin v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos v$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,\frac{\pi}{2}]$; formula Stokes ne dă:

$$\oint_\gamma x^2y^3dx + dy + zdz = \iint_\Sigma (-3x^2y^2\cos\gamma)\,d\sigma = -3\int_0^{2\pi}\cos^2 u\sin^2 u\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 v\cos v\,dv =$$

$$= -\frac{3\pi}{20}.$$

XI.2.12. Să se calculeze, cu ajutorul formulei Stokes, circulația câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, de-a lungul cercului de intersecție între sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, și planul $x + y + z = 0$, parcurs în sens direct dacă se privește din partea pozitivă a axei Ox.

Ind. Alegem drept suprafață Σ partea din planul $x + y + z = 0$, decupată de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; reprezentarea parametrică a suprafeței este $x = u, y = v, z = -u - v$, $(u,v) \in A$, unde A este proiecția cercului din enunț pe planul xOy, adică $A = \{(u,v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{2}a^2\}$; normala la suprafață în sensul lui Ox are cosinușii directori $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Avem:

$$\oint_{fr\Sigma} ydx + zdy + xdz = -\iint_\Sigma (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,d\sigma = -3\iint_A dudv.$$

Mulțimea A este interiorul unei elipse, a cărei ecuație poate fi scrisă și altfel: $\left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = \frac{1}{2}a^2$; facem următoarea schimbare de coordonate:

$$u + \frac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{2}}a\tilde{u},\ \frac{\sqrt{3}}{2}v = \frac{1}{\sqrt{2}}a\tilde{v},\ \text{de jacobian } \frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

Atunci $\iint_A dudv = \frac{a^2}{\sqrt{3}}\iint_{A_1} d\tilde{u}d\tilde{v}$ unde $A_1 = \{(\tilde{u},\tilde{v}) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \le 1\}$, rezultând astfel $\iint_{A_1} d\tilde{u}d\tilde{v} = \pi$. In concluzie $\oint_{fr\Sigma} ydx + zdy + xdz = -\pi\sqrt{3}a^2$.

XI.2.13. Să se calculeze, cu ajutorul formulei Stokes, circulația câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x}}\vec{j} + z\vec{k}$, de-a lungul curbei γ, intersecție a cilindrului $x^2 + y^2 = 2x$ cu planul $x + y + z = 0$.

Ind. $\oint_{fr\Sigma} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{ydy}{\sqrt{x}} + xdz = -\iint_\Sigma (\cos\beta + \frac{y}{2x\sqrt{x}}\cos\gamma)d\sigma$, unde Σ este partea din planul $x + y + z = 0$, interioară cilindrului $x^2 + y^2 = 2x$, adică $z = -x - y$, unde

Scanned with OKEN Scanner

$(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$ cu $x^2+y^2\le 2x$; atunci $\oint\limits_{fr\Sigma}\frac{dx}{1+x^2}+\frac{ydy}{\sqrt{x}}+xdz=-\iint\limits_{A}(1+\frac{y}{2x\sqrt{x}})dxdy$ şi trecând la coordonate polare obţinem $\oint\limits_{fr\Sigma}\frac{dx}{1+x^2}+\frac{ydy}{\sqrt{x}}+xdz=-\pi$.

XI.2.14. Folosind formula Stokes, să se calculeze integrala curbilinie:

$$\oint\limits_{\gamma} y^2dx+z^2dy+x^2dz,$$

unde γ este curba Viviani definită prin intersecţia suprafeţelor $x^2+y^2+z^2=a^2$ şi $x^2+y^2=ax$

Ind. $\oint\limits_{\gamma} y^2dx+z^2dy+x^2dz=-2\iint\limits_{\Sigma}(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)d\sigma$, Σ fiind porţiunea din suprafaţa exterioară a sferei, mărginite de curba Viviani, adică $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$ cu $x^2+y^2\le ax$; avem:

$$-2\iint\limits_{\Sigma}(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)d\sigma=-2\iint\limits_{A}(x+y+\frac{xy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})dxdy=-\frac{\pi a^3}{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTE DATE LA EXAMENE

30.01.1999.

ANALIZA MATEMATICA I

1) Fie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ două funcţii oarecare; arătaţi că :

$$(g \circ f)(A_1) = g(f(A_1)), \forall A_1 \subset A.$$

Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definită prin $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; calculaţi $f((-1,3))$.

2) Argumentaţi afirmaţia : " $\boldsymbol{R}$ este spaţiu metric complet".

3) Stabiliţi natura seriei : $\sum_{n \geq 2} x^n \sin \frac{x}{2^n}, x \in \boldsymbol{R}$

4) Arătaţi că o funcţie continuă $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ce admite asimptote orizontale la $\pm\infty$ este mărginită.

5) Legătura între continuitate şi uniform continuitate.

6) Fie $f: A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, $x_0 \in \text{int}A$; argumentaţi de ce următoarele afirmaţii:

i) f este derivabilă în x_0.

ii) f este diferenţiabilă în x_0.

sunt echivalente.

7) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n)}, x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1,-2,...,-n\}.$$

8)Se consideră integrala $I_n = \int_0^1 x^n \cos \pi x dx$; să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul lui I_n. Să se arate că şirul $(I_n)_n$ este descrescător şi are limita zero.

9) Demonstraţi că intr-un spaţiu metric un şir Cauchy este mărginit. Dar într-un spaţiu normat?

Ind.1) vezi problemele I.1.14 şi 1.1.15; 2) $(\boldsymbol{R}, d)$ cu $d(x,y) = |x-y|$ este spaţiu metric. Pentru a arăta completitudinea demonstrăm de fapt teorema II.1.2. (criteriul de convergenţă a lui Cauchy);.3) vezi problema II.3.19.; 4) este problema III.1.14.: 5) definiţi continuitatea într-un punct (noţiune locală), uniform continuitatea (noţiune globală); uniform continuitatea implică continuitatea, reciproca nefiind în general adevărată; enunţaţi şi demonstraţi teorema III.1.3. (puteţi enunţa şi următoarele rezultate: 1) Orice funcţie periodică şi continuă $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ este uniform continuă, 2)Orice funcţie continuă $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ al cărei grafic admite asimptote la $-\infty$ şi la $+\infty$ este uniform continuă; 6) propoziţia III.2.1;. 7) problema III.2.6.; 8) vezi problema III.3.12; 9) demonstraţia punctului b) al propoziţiei IV.2.4, demonstraţie ce a fost dată ca exerciţiu (temă); nu se ia în considerare demonstraţia punctukui b) al propoziţiei II.1.6.

Scanned with OKEN Scanner

6.02.1999

ANALIZA MATEMATICA I

1) Fie $A \subset \boldsymbol{R}$ o mulţime mărginită inferior; arătaţi ca $\inf A \in \overline{A}$.

2) Demonstraţi că un şir de numere reale monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent; aplicaţie: şirul $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este descrescător şi convergent la e.

3) Studiaţi natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{(a.n)^n}{n!}$, $a > 0$;

4) Caracterizarea continuităţii unei funcţii într-un punct;

5) Arătaţi că o funcţie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ este continuă pe $\boldsymbol{R}$ dacă şi numai dacă $\forall J \subset \boldsymbol{R}$, interval deschis avem $f^{-1}(J)$ mulţime deschisă;

6) Demonstraţi formula Taylor cu restul Lagrange;

7) Studiaţi natura şi în caz de convergenţă calculaţi valoarea integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

8) Enunţaţi şi demonstraţi proprietatea privind transferul de continuitate în cazul seriilor de funcţii

9) Demonstraţi inegalitatea Cauchy- Schwarz într-un spaţiu vectorial real cu produs scalar

Ind. 1)a se vedea demonstraţia propoziţiei II.2.4; 2) este teorema II.1.3. şi problema II.1.10; 3) problema II.3.9; 4) propoziţia III.1.5; 5) problema III.12; 6) teorema III.2.6.; 7) problema III.5.1.4; 8) se reface demonstraţia propoziţiei III.4.3 pentru şirul sumelor parţiale; 9) propoziţia IV 1 1.

12.02.1999.

ANALIZA MATEMATICA I

1) Enunţaţi şi demonstraţi teorema Bolzano- Weierstrass;

2) Definiţi limitele extreme ale unui şir de numere reale şi calculaţi-le în cazul

$$x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n} + \cos\frac{n\pi}{3} \text{ şi } y_n = \frac{n^{3(-1)^n}}{4n^3+1};$$

3) Imaginea unei mulţimi compacte printr-o funcţie; consecinţe;

4) Definiţi funcţia uniform continuă şi stabiliţi care dintre funcţiile următoare este uniform continuă, argumentând răspunsul:

a) $f_1(x) = e^{-|x|}\ln(1+x^2)$, $x \in \boldsymbol{R}$;

b) $f_2(x) = \sin x + \cos x, x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f_3(x) = x + \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

5) Aplicație a formulei Taylor în studiul extremelor (enunț, demonstrație); calculați punctele de extrem ale funcției $f(x)=2\cos x+x^2, x\in \boldsymbol{R}$;

6) Teorema de structură a lui Jordan (enunț, demonstrație); enumerați cel puțin două consecințe;

7) Stabiliți mulțimea de convergență a seriei de funcții:

$$\sum_{n\geq 1}(2-x)(2-\sqrt{x})...(2-\sqrt[n]{x}), x>0;$$

8) Studiați convergența și în caz afirmativ calculați valoarea integralei

$$\int_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx;$$

9) Demonstrați că într-un spațiu metric un șir convergent este Cauchy; în ce spații este adevărată reciproca? exemple.

Ind. 1) teorema II.1.1; 2) $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\inf_{n\in N}\sup_{k\geq n}x_k$ și $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\sup_{n\in N}\inf_{k\geq n}x_k$; $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ este cel mai mare element al mulțimii punctelor limită ale șirului $(x_n)_n$ în timp ce $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ este cel mai mic element al aceleași mulțimi; astfel $L(x_n)=\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}$ și $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=-1$; $L(y_n)=\{0,\frac{1}{4}\}$ și $\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n=0$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{4}$; (pentru amănunte vezi problemele II.1.18);3) enunțați și demonstrați teorema III.1.2 și prezentați propoziția III.1.6., explicând de ce este o consecință a teoremei; 4) f_1 este uniform continuă pe $\boldsymbol{R}$, fiind funcție continuă pe $\boldsymbol{R}$, ce admite asimptote la $-\infty$ și la $+\infty$; f_2 fiind continuă și periodică pe $\boldsymbol{R}$ este uniform continuă; f_3 nu este periodică, nu are asimptote la $-\infty$ si la $+\infty$, dar este lipschitziană fiind astfel uniform continuă; 5) propoziția III.2.5., problema I.2.24;6) teorema III.6.2; 7) problema III.4.5.; 8) problema III.5.1.; 9) propoziția IV.2.4.

!3.02.1999

ANALIZA MATEMATICA I

1) Argumentați afirmația : [-1,1] nu este mulțime numărabilă;

2) Studiați convergența șirului definit prin relația de recurență

$$x_n=\frac{2}{1+x_{n-1}}, n\geq 2,\ x_1=5;$$

3) Criteriul lui Abel pentru serii numerice;

4) Imaginea unei mulțimi conexe printr-o funcție continuă (enunț, demonstrație, consecințe);

5) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\in Q\\ x^3+x^2-5x+3, & x\in R\setminus Q\end{cases};$$

Scanned with OKEN Scanner

6) Se consideră $f: \boldsymbol{R} \setminus \{1,2\} \to \boldsymbol{R} \quad f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$; calculaţi limita şirului cu termenul general $a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f^{(k)}(n+3)$;

7) Stabiliţi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri:

$$1+\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

8) Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi integrala: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{|x^2-4|}}$;

9) Argumentaţi afirmatia : $\boldsymbol{R}^P$ este spatiu metric complet

Ind. 1) propoziţia I.3.4.; 2) vezi problema II.1.13; 3) propoziţia II.3.9; 4) teoremă III.1.4; 5) problemele III.1.4, III.2.5; 6) problema III.2.7; 7) problema III.4.11; 8)problema III.5.5.b);9) teorema IV.2.1.

14.02.1999.

ANALIZA MATEMATICA I

1) Enunţaţi şi demonstraţi principiul lui Cantor; daţi cel puţin două exemple de rezultate în a căror demonstraţie se foloseşte acest principiu;

2) Natura seriei $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}$, $a>0$;

3) Caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct;

4) Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcţie continuă; arătaţi $F_0 = \{x \in \boldsymbol{R}; f(x) = 0\}$ este o mulţime închisă;

5) Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definită prin $f(x)=9^x+3^x+2$; determinaţi $f(\boldsymbol{R})$; arătaţi că f este injectivă; $(f^{-1})'(4)$ şi $(f^{-1})''(4)$;

6) Transfer de integrabilitate la şiruri de functii;

7) Studiaţi convergenţa integralei şi în caz afirmativ calculaţi valoarea integralei

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}};$$

8) Demonstraţi că într-un spaţiu metric un şir convergent este mărginit; afirmaţia este adevărată intr-un spaţiu liniar normat?

9) Studiaţi natura şirurului $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 3^k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k!}\right) \subset \boldsymbol{R}^2$.

Ind. 1) propoziţia 1.2.4. se foloseşte în demonstraţiile propoziţiei I.3.4.şi a teoremei II.1.1; 2) exemplul de la propoziţia II.3.8; 3) propoziţia III.1.1; 4) vezi problema III.1.10; 5) problema III.2.25.; 6) propoziţia III.4.5.; 7) problema III .5.3.1.; 8) propoziţia IV.2.1.ii); 9) problema IV.2.

Scanned with OKEN Scanner

5. 06.1999.

ANALIZA MATEMATICA I (restanță)

1) Arătați că într-un spațiu metric orice șir convergent este Cauchy ; explicați afirmația : $\boldsymbol{R}$ este spațiu metric complet.

2) Se dă șirul $a_n = n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}$; să se arate că este un șir monoton și mărginit; notând cu a limita sa, să se găsească termenul a_n începând de la care avem $|a_n - a| \leq 0.01$.

3) Studiați natura seriei: $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} .a^n$, $a > 0$.

4) Caracterizați mulțimile deschise din $\boldsymbol{R}$.

5) Fie $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ o funcție continuă, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Arătați că există $\xi \in [a,b]$, astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

6) Discontinuitățile unei funcții monotone (demonstrați la alegere una din afirmații).

7) Să se arate că funcția $f: \boldsymbol{R} \to (3, \infty)$, $f(x) = 9^x + 3^x + 3$ este bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(5)$ și $(f^{-1})''(5)$.

8) Transfer de derivabilitate în cazul șirurilor de funcții

9) Studiați convergența și în caz afirmativ calculați integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$

Ind. 1) propoziția IV.2.4 , teorema II.1.2;. 2) se aduce a_n la o formă mai simplă: $a_n = \frac{n}{2(n+1)}$; $(a_n)_n$ este crescător și mărginit superior ($a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$); din definiția cu ε obținem (cazul ε =0.01) $n > 99$;3) exemplu rezolvat în curs (propoziția II.3.7); 4)propoziția II.2.1; 5) problema III.1.21;.6) propozițiile III.1.8, III.1.9.; 7) analog cu problema III.2.25; 8) propoziția III.4.3;. 9) exercițiu III.5.4.

9.06.1999.

ANALIZA MATEMATICA II

1) Studiați diferențiabilitatea în origine a funcției :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad\qquad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Ce puteți afirma despre continuitatea în origine a derivatelor parțiale?

Scanned with OKEN Scanner

2) Enunțați și demonstrați teorema creșterilor finite în cazul funcțiilor vectoriale de mai multe variabile reale.

3) Determinați extremele funcției $z(x,y)$ dată implicit de ecuația:

$$x^2 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0.$$

4) Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, pentru z funcție de clasă C^2, în raport cu $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, considerând $z(u,v)$ prin schimbarea de variabile independente: $x = u^2$, $y = uv$.

5) Calculați folosind derivarea sub semnul integral:

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(y \sin x)}{\sin x} dx, \; y > 0.$$

6) Calculați $\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dxdy$, unde D: $x^2 + y^2 \le 1$

7) Fluxul câmpului vectorial $\bar{v}(x,y,z) = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ prin suprafața exterioară a paraboloidului $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

8) Calculați $\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, γ fiind un drum ce înconjoară, în sens trigonometric, originea axelor de coordonate.

9) Enunțați și demonstrați formula Gauss- Ostrogradski

Ind. 1) analog VI.2.9.d); este un exemplu de funcție diferențiabilă în origine, ale cărei derivate parțiale nu sunt continue în origine.;3) vezi VII.2.24.c); 4) ținând seama că $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y} u$, avem $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{u}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} +$ $+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$; pentru calculul lui $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ derivăm în funcție de y sistemul $x = u^2$, $y = uv$, ținând seama că u și v sunt funcții de x și y;. 5) VIII.1.14;

6) $\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} 1, & x^2 - y^2 + 2 > 0 \\ -1, & x^2 - y^2 + 2 < 0 \end{cases}$ și astfel

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dxdy = \iint_{D_1} dxdy - \iint_{D_2} dxdy, \text{ unde}$$

$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x^2 - y^2 + 2 > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x^2 - y^2 + 2 < 0\}$, $D_2 = D_2' \cup D_2''$, unde

$D_2' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y > \sqrt{2 + x^2}\}$, $D_2' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y < -\sqrt{2 + x^2}\}$; este clar că $\iint_{D_1'} dxdy = \iint_{D_2''} dxdy$ și astfel $\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dxdy = 4\pi - 4 \iint_{D_1'} dxdy = 4\pi -$

$\int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{4\pi}{3} + 4\ln(2 + \sqrt{3}))$.

7) Cum $\cos\gamma < 0$ (normala la Σ face cu axa Oz un unghi obtuz), avem:

Scanned with OKEN Scanner

$\vec{N} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ şi astfel: $\iint_{\Sigma} \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle d\sigma = \iint_{A} 3xy(x^2+y^2)dxdy$, unde $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$; 8) vezi exemplul 2 , formula Green Riemann (curs)

10.06.1999.

ANALIZA MATEMATICA II.

1) Enunţaţi şi demonstraţi principiul contracţiilor; aplicaţie: calculaţi limita şirului $(x_n)_n \subset \boldsymbol{R}$ definit astfel: $x_0 = 10$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$

2) Calculaţi diferenţiala dz dacă $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = uv$;

3) Să se calculeze extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ pentru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b > c > 0$.

4) Ce devine derivata parţială $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă se face transformarea:

$$u = x + z, v = y + z, w = x + y$$

5) Calculaţi $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, $a,b > 0$;

6) $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, unde A este definită de : $x^2 + y^2 + z^2 \le z$;

7) $\oint_{\gamma} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, unde γ este curba de intersecţie a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2Rx$, $z \ge 0$, (curba lui Viviani), parcursă în sens trigonometric când privim din origine.

8) Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ în suprafaţă $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

9) Enunţaţi şi demonstraţi formula Stokes

Ind. 1) Tinând seama că $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \ge 1$, definim funcţia $f:[1,\infty) \to [1,\infty)$ $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$; menţionaţi că $[1,\infty)$ este spaţiu metric complet (de ce?) şi arătaţi că f este contracţie ($f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x^2}) < \frac{1}{2}$) şi aplicaţi principiul contracţiilor

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u$; ţinem seama că u şi v sunt funcţii definite implicit de relaţiile $x = u.\cos v$, $y = u.\sin v$. 3) vezi VII.2.28; 4) VII.4.8. ; 5) se poate

Scanned with OKEN Scanner

folosi formula Frullani ca în exercițiul VIII.2.4, sau rezultatul privind permutarea ordinii de integrare observând că $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$; funcția $f:[0,\infty)\times[a,b]\to\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=e^{-xy}$ este continuă și în plus cum $e^{-xy}\le e^{-ax}$, $y\in[a,b]$, iar $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ este convergentă avem uniform convergența pe $[a,b]$ a integralei $\int_0^\infty e^{-xy}dx$. Astfel: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^\infty (\int_a^b e^{-xy}dy)dx = \int_a^b (\int_0^\infty e^{-xy}dx)dy = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$.; 6) IX.2.10, 4); 7) X.2.26; 8) XI.1.8.

19.06.1999.

ANALIZA MATEMATICA II

1) Enunțați și demonstrați formula Taylor pentru funcții reale de mai multe variabile reale.

2) Determinați extremele funcției $z(x,y)$ dată implicit de ecuația:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+z-10=0.$$

3) Scrieți matricea jacobiană a funcției $F:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^3$, definită prin: $F(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$; stabiliți legătura între matricea jacobiană și dF.

4)Rezolvați ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, unde z este funcție de clasă C^2, luând ca noi variabile independente $u=x-2\sqrt{y}$, $v=x+2\sqrt{y}$.

5) Calculați lungimea astroidei $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

6)Calculați $\int_0^\infty \frac{arctg\alpha x}{x.(1+x^2)}dx..$ $\alpha>0$

7) Calculați $\iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}}}dxdydz.$, unde $V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$

8) Fie ω o formă diferențială exactă pe o mulțime deschisă $D\subset\boldsymbol{R}^n$; enunțați și demonstrați două afirmații echivalente.

9) Calculați fluxul vectorului de poziție prin suprafața exterioară a conului $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$.

Ind. 2) Calculăm $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(1-x)}{2z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(-1-y)}{2z+1}$ și prin rezolvarea sistemului $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ obținem punctele critice $x=1, y=-1$; scriind hessiana I cu regula lui

Scanned with OKEN Scanner

Sylvester obținem că în $x=1, y=-1, 2$ una din funcțiile definite de ecuația dată are un un maxim $z_{max}=3$, iar cealaltă are un minim $z_{min}=-4$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,etc; 5) vezi V.2.2; 6) VIII.2.1.c); 7) trecând la coordonate polare generalizate obținem: $I=abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \int_0^1 r^2 e^r dr$; 9) exemplul 2, fluxul unui câmp vectorial printr-o porțiune de suprafață (curs)

25.06.1999.

ANALIZA MATEMATICA II

1) Studiați continuitatea în origine a funcției: $f(x,y)=\begin{cases} y^2 \cdot \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), y\neq 0 \\ 0, y=0 \end{cases}$

2)Ce devine $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ în urma schimbării de variabile: $x=ue^v$, $y=ve^u$?

3)Calculați extremele funcției $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

4) Formula lui Taylor pentru funcții reale de mai multe variabile reale (demonstrație)

5) Calculați $I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(ytgx)}{tgx}dx$, $y>0$

6) Determinați funcția a cărei diferențiala totală este $du=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})dx+(\frac{x}{y^2}+$ $+\frac{x}{z})dy-\frac{xy}{z^2}dz$.

7) Calculați volumul corpului mărginit de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$

8) Calculați fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}+\frac{1}{z}\vec{k}$ prin suprafața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

9) Formula Green –Riemann (demonstrație)

Ind. 1) vezi VI.1.8.,d); 2) VII.4.6.; 3) veziVI.2.30; 5) VIII.1.1,3); 6) X.2.27

7) $V=\iiint_A dxdydz=\iint_A \left(\int_{\frac{1}{2}(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}} dz\right)dxdy$, unde $A=\{(x,y)\in R^2 | \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}\leq 1\}$; pentru

Scanned with OKEN Scanner

calculul integralei duble se folosesc coordonate polare generalizate; 8) caz particular, problema XI.1.14

26.06.1999.

ANALIZA MATEMATICA II

1) Enunţaţi şi demonstraţi condiţia suficientă de diferenţiabilitate; este şi necesară?

2) Studiaţi existenţa punctelor de extrem ale funcţiei $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$.

3) Calculaţi dz dacă: $x=a\sin u\cos v, y=b\sin u\sin v, z=c\sin v$.

4) Calculaţi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, în urma schimbării de variabile: $u=x+y, v=x-y$ şi a funcţiei $w=xy-z$, considerând z,w funcţii de clasă C^2

5) Enunţaţi şi demonstraţi rezultatul asupra permutării ordinii de integrare în cazul integralelor cu parametru.

6) Calculaţi $I(y)=\int_0^1 \frac{arctgxy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

7) Calculaţi $\int_\gamma |y|\,ds$, unde γ este bucla din dreapta a lemniscatei $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

8) Calculaţi $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ unde D este mulţimea din primul cadran, limitată de curbele: $x^2+y^2=a^2$, $y=x\sqrt{3}$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

9) Să se afle fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin octantul pozitiv al sferei

Ind. 2) VI.2.29.c); 3) analog VII.2.20.; 4) calculăm $\frac{\partial\omega}{\partial x}=y-\frac{\partial z}{\partial x}$, respectiv $\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v}$ şi astfel $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\omega}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}$; 6) în $x=0$ funcţia poate fi prelungită prin continuitate; $\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{arctgxy}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{arctgy}{\sqrt{2}}$, integrala este convergentă; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$, în plus $\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ şi din convergenţa integralei $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ rezultă uniform

Scanned with OKEN Scanner

convergența integralei $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$; din teorema de derivare sub semnul integral . rezultă $I'(y)=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$ și astfel $I(y)=\frac{\pi}{2}\ln|y+\sqrt{1+y^2}|$; 7) ecuația curbei în coordonate polare este $x=\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$, $y=\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ și astfel $\int_\gamma |y|\,ds=$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}|.\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi.d\varphi$; 8) IX.2.2.,2); 9) exemplul 1, calculul fluxului unui câmp vectorial printr-o porțiune de suprafață (curs).

30.08.1999

ANALIZA MATEMATICA I (restanță)

1) Studiați convergența șirului: $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$, $n\in N^*$

2) Care este natura seriei $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}$, $a>0$.

3) Condiții echivalente ce caracterizează continuitatea unei funcții într-un punct (enunț, demonstrație)

4) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției: $f(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ x^2-2x+2, & x\in R\setminus Q \end{cases}$

5) Studiați convergența integralei $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

6) Scrieți formula Mac-Laurin pentru funcția $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$,

7) Enunțați și demonstrați teorema de transfer de continuitate pentru șiruri de funcții.

8) Studiați convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} arctg\frac{2x}{x^2+n^4}$, $x\in R$;

9) Enunțați proprietățile șirurilor Cauchy în spații metrice, și demonstrați una la alegere; sunt valabile In spații liniare normate?

Ind. 1) vezi II.1.11.; 2) exemplu , criteriul Raabe Duhamel (propoziția II.3.8-curs); 3) problemă asemanătoare cu III.2.5.;5) deoarece $\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{2}}.\frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}=$

Scanned with OKEN Scanner

1 şi $\lim_{x\to 2}(2-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}=2$, integrala este convergentă; printr-o substituţie convenabilă $x=\cos^2 t+2\sin^2 t$, integrala se calculează imediat; 6) calculăm $f^{(k)}(x)=(-1)^k k![\frac{1}{(x-3)^{k+1}}-\frac{1}{(x-2)^{k+1}}]$; $f(x)=\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{n}x^k(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{3^{k+1}})+$

$+(-1)^{k+1}x^{k+1}[\frac{1}{(\xi-3)^{k+1}}-\frac{1}{(\xi-2)^{k+1}}]$, ξ intre 0 şi x.

10.09.1999.

ANALIZA MATEMATICA II (restanţă)

1) $z(x,y)$ este definită implicit de ecuaţia $F(\frac{x}{y+z},\frac{y}{x+z})=0$, unde F este o funcţie de clasă C^2; calculaţi $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2) Enunţaţi şi demonstraţi teorema de medie pentru funcţii vectoriale , de mai multe variabile reale

3) Transformaţi ecuaţia lui Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ trecând la coordonate polare ($x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$).

4)Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea pentru funcţia $f(x,y)=x^y$, $x>0, y>0$ şi să se deducă valoarea aproximativă pentru (1.1,1.2).

5) Derivând sub semnul integral funcţia $F(y)=\int_0^1\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}arctg\frac{1}{y}$,

calculaţi $\int_0^1\frac{dy}{(1+y^2)^2}$.

6) $\iiint_A\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, unde A este definită de : $x^2+y^2+z^2\le z$;

7)Caracterizarea formei diferenţiale exacte.

8) Calculaţi fluxul câmpului vectorial: $\vec{v}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ prin:

a) faţa laterală a conului $x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1$

b) faţa totală a conului

Ind. 1) Notând $u=\frac{x}{y+z}$, $v=\frac{y}{x+z}$, avem de exemplu, derivând în raport cu x:

$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{y+z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{x+z-y\frac{\partial z}{\partial x}}{(x+z)^2}=0$, ecuaţie cu necunoscuta $\frac{\partial z}{\partial x}$; 3)VII.4.5.; 4)VI.2.28 ; 5) VIII.1.2.; 6)IX.2.10,4); 8) XI.2.8.; acest subiect a fost notat cu două puncte.

Scanned with OKEN Scanner

26.01.2000.

ANALIZA MATEMATICA I

A.

1) Studiaţi convergenţa şirului definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1}=\frac{x_n+4}{x_n+1},\ n\geq 1, x_1\in(0,2).$$

2) Calculaţi produsul în sens Cauchy al seriilor $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}, \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}}$; este convergentă seria obţinută?

3) Ce devine ecuaţia $x^2y''-xy'+y=0$, cu necunoscuta $y=y(x)$, prin schimbarea de variabilă independentă: $x=e^t$?

4) Care dintre funcţiile următoare este integrabilă Riemann

a) $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], x\in(0,1]\\ 0, \quad x=0\end{cases}$;

b) $g:[0,1]\to R$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\cap Q\\ 1-2x^2, & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$?

Argumentaţi temeinic răspunsul.

5) Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$ şi în caz afirmativ calculaţi –o.

6) Definiţi următoarele noţiuni:
- mulţime cel mult numărabilă;
- şir Cauchy;
- mulţime compactă;
- polinom Taylor.

7) Stabiliţi corectitudinea următoarelor afirmaţii:

a) dacă $f:[a,b]\to R$ este derivabilă, cu derivata integrabilă, atunci f este uniform continuă;

b) dacă $f:[a,b]\to R$ este integrabilă Riemann. atunci f este continuă.

8) Caracterizarea punctului de acumulare cu ajutorul şirurilor.

9) Transfer de derivabilitate – şiruri de funcţii.

B.

1) Studiaţi convergenţa şirului definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\sqrt{1-x_n},\ n\geq 1.$$

2) Stabiliţi natura seriilor $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}, \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Ce devine ecuaţia $(1-x^2)y''-xy'=0$, cu necunoscuta $y=y(x)$, prin schimbarea de variabilă independentă: $x=\cos t$?

4) Fie $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}$, o funcţie continuă; calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n f(x)dx$.

5)Studiaţi convergenţa integralei $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ şi în caz afirmativ calculaţi –o.

6)Definiţi următoarele noţiuni:

- marginea inferioară a unei mulţimi de numere reale;
- mulţime derivată;
- funcţie diferenţiabilă într-un punct;
- funcţie cu variaţie mărginită

7) Stabiliţi corectitudinea următoarelor afirmaţii:

a) dacă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ este continuă , atunci f este măsurabilă Lebesgue;

b) dacă $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ este continuă şi admite asimptote orizontale la $\pm\infty$. atunci f este mărginită.

8)Criteriul lui Cauchy de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct.

9)Transfer de continuitate - şiruri de funcţii.

Ind. A.

1) Se observă că $x_{n+1}=1+\frac{3}{x_n+1}$ şî astfel exerciţiul este analog lui 2.1.13.;

2) $\sum\limits_{n\ge 1}(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{n-k-1}}\frac{1}{k\sqrt{k}})$, serie ce este convergentă conform teoremei Cauchy-Maertens (II.3.1) (cele două serii cu termeni pozitivi sunt convergente, deci absolut convergente).; 3) avem $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^t-e^t\cdot\frac{dy}{dt}}{e^{3t}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{e^{2t}}$;

4) aplicăm criteriul lui Lebesgue (III.3.3): a) f este mărginită ($0\le f(x)\le 1$) şi mulţimea punctelor de discontinuitate este $\{\frac{1}{n}, n\in\boldsymbol{N}^*\}$, deci o mulţime numărabilă care este de măsură Lebesgue nulă; b) g nu este integrabilă deoarece mulţimea punctelor de discontinuitate este $[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$; 5) aplicăm corolarul criteriului de comparaţie(III.5.3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^6\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=1$, deci integrala este convergentă; pentru calculul efectiv a se vedea problema III.3.10; 7) a)derivata lui f fiind integrabilă este mărginită, şi cum o funcţie derivabilă cu derivata mărginită este lipschtziană, este uniform continuă; b) enunţ incorect, de exemplu $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ este integrabilă conform criteriul lui Lebesgue; 8) propoziţia II.1.7; 9) propoziţia III.4.4.

Scanned with OKEN Scanner

B.

1) vezi problema II.1.15.; 2) se aplică criteriul de condensare al lui Cauchy (propoziția II.3.5.); 3)avem $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}.\sin t-\cos t.\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}$; 4) f fiind continuă pe compact este mărginită(III.1.6); fie $M=\sup_{[a,b]}|f(x)|$, atunci conform propozițiilor III.3.5, III.3.3., avem $0\le|\int_0^1 x^n f(x)dx|\le M\int_0^1 x^n dx=\frac{M}{n+1}$; făcând $n\to\infty$ obținem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$; 5) vezi problema III.5.1.- 3); 7) a) problema III.1.14; din propoziția III.7.8 retinem echivalența $1\Leftrightarrow 6$ și aplicăm teorema III.1.1.;

8) propoziția III.1.2; 9)propoziția III.4.3.

27.01.2000.

ANALIZA MATEMATIÇA I

1) Studiați convergența șirului definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1}=\sqrt{4x_n-x_n^2},\ n\ge 1, x_1\in(0,2).$$

2) Ce devine ecuația $y''-2y(y')^2=0$, cu necunoscuta $y=y(x)$, prin schimbarea rolului variabilelor?

3) Determinați punctele de extrem ale funcției $f:(0,\infty)\to R$ $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

4) Determinați mulțimea de convergență a seriilor de funcții: $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!x^n}$, $\sum_{n\ge1}\frac{n!}{x^n}$.

5) Studiați convergența integralei $\int_0^\infty\frac{arctgx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$ și în caz afirmativ calculați –o.

6)Definiți următoarele noțiuni:

- mulțime conexă;
- $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$;
- funcție uniform continuă;
- funcție măsurabilă Lebesgue;

7) Stabiliți corectitudinea următoarelor afirmații:

a) dacă $f:[a,b]\to R$ este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann;

b) Un șir Cauchy de numere raționale este convergenr?

8) Criteriul lui Abel pentru serii de numere reale

9) Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție continuă; enumerați proprietățile lui f și demonstrați una la alegere.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. 1) se aplică teorema II.1.3 , demonstrând că şirul este crescător şi mărginit superior; 2) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x'(y)}$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}$; 3) propoziţia III.3.7 ne spune că $f'(x)=\frac{\sin x}{x}$; 4) a) $M_c=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; b) $M_c=\phi$;5) problema III.5.1 – 4); 7) adevărat, pe baza propoziţiilor III.1.9 şi III.3.3 (criteriul lui Lebesgue); 8) propoziţia II.3.9.; 10) teoremele III.1.2,1.3,1.4, şi propoziţiile III.1.6, III.3.1.

27.01.2000.

ANALIZA MATEMATICA I

1) Studiaţi natura seriilor următoare $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

2)Fie funcţia f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$; arătaţi că: a) nu există $\lim_{x\to 0} f(x)$; b) în orice vecinătate a originii, funcţia ia de o infinitate de ori valorile {-1,0,1}; c) f are proprietatea valorii intermediare; d) schiţaţi graficul funcţiei.

3) Să se arate că funcţia f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=a^x+x$ este bijectivă şi sa se calculeze $(f^{-1})'(1)$ şi $(f^{-1})''(1)$

4) Studiaţi convergenţa integralei $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$; în caz afirmativ calculaţi valoarea integralei.

5) Găsiţi dezvoltarea In serie de puteri a funcţiei $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $|x|<1$

6) Definiţi următoarele noţiuni:
- şir Cauchy
- mulţime conexă
-funcţie convexă
- funcţie cu variaţie mărginită

7) a)Ce puteţi afirma despre cardinalul unui interval al axei reale? Argumentaţi temeinic răspunsul.

b) Stabiliţi dacă următoarea afirmaţie este adevărată, aducând argumente consistente: dacă f: $[a,b]\to\boldsymbol{R}$ este o funcţie integrabilă; atunci funcţia F: $[a,b]\to\boldsymbol{R}$, definită de $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este lipschitziană;

8)Arătaţi că un şir de numere reale, descrescător, mărginit inferior este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

9) Enunțați și demonstrați teorema de transfer de derivabilitate pentru seriii de funcții

Ind. 1) a se vedea exercițiile II.3.3.d); II.3.12.b); 2) problemă asemănătoare cu III.1.22;3) problemă asemănătoare cu III.2.25.; 4) III.3.5., 4); 5) III.4.13.,b)
7) a) Propoziția I.3.4. afirmă ca intervalul [- 1,1] nu este o mulțime numărabilă. $\aleph_0$ este element neutru fața de adunarea numerelor cardinale transfinite; în consecință *card* [- 1,1] = *card* (-1,1). Construind bijecția: $f: \boldsymbol{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$,
deducem că intervalele din $\boldsymbol{R}$ sunt de *puterea continuului.*7b) da, vezi III.3.16

Remarcă
Menționez că fiecare subiect a fost notat cu câte un punct (cu excepția subiectului 8 din 19.06,1999; din oficiu se acordă un punct

Scanned with OKEN Scanner

ANALIZA II

A

1) Fie $f: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$; arătați că f este continuă și că mulțimea $C = \{(x,y); x^2+y^2 = 1\}$ este conexă

2) Determinați $z(x,y)$ dacă $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3+y^3}{y}$ și $z(x,1) = \cos x$.

3) Din sistemul $\begin{cases} F(x-y+z+u, x^2+y^2-z^2-u) = 1 \\ y\sin x + zu = 2 \end{cases}$, unde F este de clasă C^1 pe $D \subset \boldsymbol{R}^4$, calculați du și dz (în punctul curent).

4) Calculați următoarele integrală, folosind derivarea sub semnul integral

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-yx}}{xe^x} dx, y > -\frac{1}{2};$$

5) Calculați $\iiint_A z^2 dxdydz$, unde A este partea din sfera $x^2+y^2+z^2 \le 1$, care este în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)$, $x \ge 0$.

6) Determinați potențialul câmpului gravitațional generat de un punct material de masă m concentrată în originea axelor de coordonate :

$$G = (-\frac{mx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, -\frac{my}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, -\frac{mz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}).$$

Arătați că potențialul g verifică ecuația lui Laplace: $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$

7) Sunt corecte enunțurile următoare? Dacă nu faceți corecturile necesare.

a) Situându-ne într-un spațiu metric complet, șirul sumelor parțiale este convergent dacă și numai dacă este Cauchy, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N$ astfel încât $\forall m, n \ge n_0$ avem $d(s_n, s_m) < \varepsilon$

b) Dacă E este spațiu Banach, atunci $L(E, E_1)$ este spațiu Banach

c) O mulțime $A \subset \boldsymbol{R}^n$ conexă este conexă prin arce.

d) Fie $K \subset \boldsymbol{R}^3$, un compact cu frontiera Σ, care este o suprafață orientată, netedă și închisă; fie $A \subset \boldsymbol{R}^3$ o mulțime deschisă ce-l conține pe K și $v: A \to \boldsymbol{R}^3$, un câmp vectorial de clasă C^1 pe A:

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k};$$

atunci fluxul lui $\vec{v}$ prin Σ, după normala exterioară $\vec{N}$ este egal cu integrala divergenței lui $\vec{v}$ pe K, adică $\iint_{\Sigma} \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle d\sigma = \iiint_K (div\, \vec{v})\, dxdydz$

Scanned with OKEN Scanner

8) Afirmaţiile următoare sunt adevărate? Argumentaţi temeinic răspunsul!

a) Fie $A \subset \boldsymbol{R}^n$ o mulţime convexă cu interiorul nevid şi $f\ A \to \boldsymbol{R}^m$ o funcţie continuă pe A, diferenţiabilă pe int$A$; dacă $df(c) = \mathcal{O}$, $\forall\ c \in \text{int}A$, atunci f este constantă pe A.

b) Fie $A \subset \boldsymbol{R}^n$ o mulţime măsurabilă şi mărginită şi $f.: A \to \boldsymbol{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă Lebesgue; atunci mulţimea

$$B = \{(x, y) \in A \times \boldsymbol{R} | 0 \le y \le f(x)\} \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$$

este măsurabilă în R^{n+1} şi $\mu_{n+1}(B) = \int_A f(x)dx$

9) Metoda multiplicatorilor lui Lagrange (enunţ, demonstraţie)

ind. 1) V.1.3.;2) VI.2.10.,d) 3) VII.2.6.; 4) VIII.2.1,a); 5) IX.2.11.; 6) X.22.28;

7a) In general, într-un spatiu metric nu este definită adunarea; corect: într-un spaţiu Banach; 7b) E_1 este spaţiu Banach – teorema IV.5.3.; 7c) A trebuie să fie " deschisă"- propoziţia V.2.3; 7d)enunţ corect- teorema IX.2.1.; 8) corolar, propoziţia VII.1.2; b) propoziţia IX.1.18 (schiţaţi demonstraţia).

B

1) Studiaţi continuitatea în origine a funcţiei:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{arctg(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad\qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea pentru funcţia $f(x,y) = x^y$, $x > 0, y > 0$ şi să se deducă valoarea aproximativă pentru (1.1,1.2).

3)Ce devine derivata parţială $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă se face transformarea:

$$u = x + z, v = y + z, w = x + y$$

cu $w(u,v)$ funcţie de clasă C^2?

4) Calculaţi următoarele integrale, folosind derivarea sub semnul integral

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-yx^2}}{xe^{x^2}} dx, y > -\frac{1}{2};$$

5) Calculaţi aria mulţimii mărginite de curbele: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x, y = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6) Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\vec{k}$ prin fața exterioară a paraboloidului $z=4x^2+y^2, 0\le z\le 1$.

7) Sunt corecte enunțurile următoare? Dacă nu faceți corecturile necesare.

a) Fie (E,d) un spațiu metric; dacă subspațiul (A, d_A) este complet, atunci A este compactă în E.

b) Fie (E, d) (E_1, d_1) spații metrice; fie $f: A\to E_1$, $A\subset E$, $a\in A'$. Există $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ astfel încât $\forall x', x''\in A\setminus\{a\}$ cu $d(x',a)<\delta$ și $d(x'',a)<\delta$ avem $d_1(f(x'), f(x''))<\varepsilon$.

c) Fie $G=(P,Q,R)$ Un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă, conexă și convexă $D\subset \boldsymbol{R}^3$. Dacă avem: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$, pe D, atunci G derivă dintr-un potențial

d) Fie $A\subset \boldsymbol{R}^n$ o mulțime măsurabilă și mărginită și funcția $f: A\to \boldsymbol{R}$, mărginită; dacă mulțimea $\widetilde{B}=\{(x,y)\in A\times \boldsymbol{R}\mid 0\le y<f(x)\}\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ este măsurabilă, atunci f este integrabilă pe A.

8) Afirmațiile următoare sunt adevărate? Argumentați temeinic răspunsul!

a) Fie $[a,b]\subset \boldsymbol{R}$; considerăm spațiul polinoamelor cu coeficienți reali $\mathcal{P}([a,b])$, înzestrat cu norma $\|P\|=\sup\limits_{[a,b]}|P(x)|$. $\mathcal{P}([a,b])\subset C([a,b])$ este dens în $C([a,b])$

b) Definim $A_x=\{y\in \boldsymbol{R}^m\mid (x,y)\in A\}\subset \boldsymbol{R}^m$; dacă $A\subset \boldsymbol{R}^{n+m}$ este compactă, atunci $\forall x\in \boldsymbol{R}^n$ $A_x\subset \boldsymbol{R}^m$ este compactă

9) Demonstrați că orice operator liniar $T: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^m$ este continuu.

Ind. 1) VI.1.8 și VI.1.6.c); 2) VI.2.28 ;3) VII.4.8; 4) VIII.2.1,b); 5)IX.2.4.; 6) XI.1.3.; 7 a) A este închisă și poate fi nemărginită (exemplu $(-\infty, a]$),propoziția IV.3.4; 7b) (E_1, d_1) este spațiu metric complet (criteriulCauchy IV.4.2.) ; 7c) corect , mulțime deschisă și conexă este domeniu, propoziția IX.3.3; 7d) corect, corolar IX.2.1; 8a) adevărat conform teoremelor IV.3.3. și III.4.3.; 8b) Aplicăm teorema IV.3.4: fie $(y_n)_n\subset A_x$, rezultă că șirul $(x_n, y_n)_n\subset A$ care este mulțime compactă conține un subșir convergent $(x_{k_n}, y_{k_n})_{k_n}$ și astfel șirul $(y_n)_n$ conține un subșir convergent $(x_{k_n})_{k_n}$.

C

1) Studiați continuitatea în origine a funcției

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x>0 si y>0;\\ 1, & x=0 sau y=0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Calculaţi $z(x,y)$ dacă; c) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$.

3) Ce devine expresia $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ prin transformarea $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$, $z=\frac{u^2-v^2}{4}-w$ cu $w(u,v)$ funcţie de clasă C^2 ?

4) Calculaţi: $\int_0^{\infty}\frac{arctgax-arctgbx}{x}dx$, $a,b>0$

5) Calculaţi constantele a şi b astfel încât expresia

$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$$

să fie o formă diferenţiala exactă şi apoi găsiţi funcţia a cărei diferenţială este.

6) Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{v}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}\vec{k}$ prin faţa exterioară a paraboloidului $z=4x^2+y^2, 0\le z\le 1$.

7) Sunt corecte enunţurile următoare? Dacă nu faceţi corecturile necesare.

a) Intr-un spaţiu metric orice subspaţiu închis A este un subspaţiu complet.

b) Fie $(E, \|.\|)$ un spaţiu normat şi $A\subset E$; atunci acoperirea convexă $co(A)$ a mulţimii A este mulţimea tuturor combinaţiilor convexe $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ ale elementelor $x_i\in A$;

c) Fie $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}^m$, $[a,b]\subset\boldsymbol{R}$, f continuă pe $[a,b]$, f derivabilă pe (a,b); atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât: $\|f(b)-f(a)\|=\|f'(c)\|(b-a)$.

d) Fie $K\subset \boldsymbol{R}^3$, un compact cu frontiera Σ, care este o suprafaţă orientată, netedă şi închisă; fie $A\subset \boldsymbol{R}^3$ o mulţime deschisă ce-l conţine pe K şi $v: A\to \boldsymbol{R}^3$, un câmp vectorial pe A: $\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$; atunci fluxul lui $\vec{v}$ prin Σ, după normala exterioară $\vec{N}$ este egal cu integrala divergenţei lui $\vec{v}$ pe K, adică $\iint_{\Sigma}\langle\vec{v},\vec{N}\rangle d\sigma=\iiint_K(div\,\vec{v})\,dxdydz$ (1)

8) Afirmaţiile următoare sunt adevărate? Argumentaţi temeinic răspunsul!

a) Dacă (E_1,d_1) şi (E_2,d_2) sunt spaţii metrice compacte, atunci $(E_1\times E_2, d)$ este spaţiu metric compact.

b)Aria unui compact bordat elementar $K\subset \boldsymbol{R}^2$ este dată de formula:

$$ariaK=\frac{1}{2}\oint_{FrK}xdy-ydx$$

Scanned with OKEN Scanner

9) Teorema de derivare sub semnul integral în cazul Integralelor improprii cu parametru

Ind. 1) VI.1.8.,b); 2) VI.2.23; 3)VII.4.9 ; 4)VIII.2.4.,c), dar nu ar fi rău să încercaţi şi cu proprietatea integrală a funcţiei $F(y)$(curs pag 222); 5) X.2.22; 6) XI.1.13.; 7)a) Intr-un spaţiu metric "complet" –propoziţia IV.3.5.; 7b) corect, propoziţia IV.3.10; 7c) în general avem: $\|f(b)-f(a)\| \le \|f'(c)\|(b-a)$ (propoziţia V.1.1); 7d) $\vec{v}$ este de clasă C^1, teorema IX.2.1.; 8a) se foloseşte teorema IV.3.4.; 8b) corolar1, teorema X.3.2.

D

1) Calculaţi lungimea *lemniscatei lui Bernoulli* , a cărei ecuaţie în coordonate carteziene este

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

2) Calculaţi extremele funcţiei: d) $f_4(x,y,z) = 3x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz$

3) Ce devine derivata parţială $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ prin transformarea $x=w$, $y=u+w$, $z=v$ cu $w(u,v)$ functie de clasă C^2 ?

4) Calculaţi: $\int_0^\infty \ln\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\frac{dx}{x}$, $p,q>0$, $a,b>0$

5) Calculaţi $\iiint_A (x+y+z)dxdydz$, unde A este limitată de suprafeţele: $x^2+y^2=2z$ şi $x^2+y^2+z^2=3$;

6) Să se calculeze aria decupată de cilindrul $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ în suprafaţă $x^2+y^2=2az$.

7) Sunt corecte enunţurile următoare? Dacă nu faceţi corecturile necesare.

a) Intr-un spaţiu metric complet orice subspaţiu A este un subspaţiu complet.

b) Fie $(E, \|\ \|)$ şi $(E_1, \|\ \|_1)$ spaţii Banach ; fie $f: A \to E_1$, $A \subset E$, $a \in A'$. Există $\lim_{x\to a} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ astfel încât $\forall x', x'' \in A \setminus \{a\}$ cu d $\|x'-a\| < \delta$ şi $\|x''-a\| < \delta$ avem $\|f(x')-f(x'')\|_1 < \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie $f: [a, b)\times A \to \boldsymbol{R}$ continuă, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} |f(x,y)| = \infty$, $\forall\, y \in A$ iar $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă; derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}: [a, b)\times A \to \boldsymbol{R}$ este continuă şi $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ este convergentă pe A, atunci $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, pentru $y \in A$.

d) Fie $A \subset \boldsymbol{R}^n$ o mulţime măsurabilă şi mărginită şi $f. A \to \boldsymbol{R}$ o funcţie mărginită; dacă f este integrabilă Lebesgue, atunci f este măsurabilă.

8) Afirmaţiile următoare sunt adevărate? Argumentaţi temeinic răspunsul!

a) Un spaţiu metric compact este complet.

b) Dacă $A \subset \boldsymbol{R}^n$ este conexă prin arce, atunci ea este conexă.

9) Enunţaţi şi demonstraţi formula Stokes.

Ind. 1) V.2.7.; 2) VI.2.3,d); 3) VII.4.10; 4) VIII.2.4 sau aplicaţi rezultatul din pag.222.curs; 5) IX.2.9; 6) XI.1.7.; 7a) orice subspaţiu "închis"- propoziţia IV.3.5; .7b) corect, este criteriul lui Cauchy de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct pentru spatii liniare normate (caz particular) ; nu este necesar ca $(E, \|\ \|)$ să fie spaţiu Banach.; 7c) nu este necesar ca $\int_a^b f(x,y)dx$ să fie uniform convergentă, este suficient să fie convergentă dar este obligatoriu ca $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ să fie uniform convergentă pe A (teorema VIII.2.2); 7d) enunţ complet -teorema IX.1.3; 8a)corolar teorema IV.3.4.; 8b) teorema V.2.2.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1] Berman G.N., A Problem Book in Mathematical Analysis, Ed. Mir, 1982.

[2] Craiu M., Roşculeţ M., Culegere de probleme de Analiză Matematică, Ed. Didactică şi Pedagogică,1976.

[3] Demidovitch et al., Recueil d'exercises et de problemes d'Analyse Mathematique, Ed Mir, 1980.

[4] Fichtenholz G.M., Differenzial und Integralrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[5] Flondor D., Donciu N., Algebră şi Analiză Matematică II, culegere de probleme, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1979.

[6] Niculescu C., Probleme de Analiză Matematică, Ed. Cardinal, Craiova, 1994.